ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA TİPİ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Merve ÖZDEMİR

2021
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı
Dr.Öğr.Üyesi Mukaddes ÖKTEN TURACI

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA TİPİ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Merve ÖZDEMİR

T.C.
Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Mukaddes ÖKTEN TURACI

KARABÜK
Şubat 2021

Merve ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA TİPİ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE” başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Mukaddes ÖKTEN TURACI ………………..
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 02/02/2021

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN (ZBEÜ)	..…………………
Üye : Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	..…………………
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mukaddes ÖKTEN TURACI (KBÜ)	…………………..

KBÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Hasan SOLMAZ ………………….
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Merve ÖZDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA TİPİ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Merve ÖZDEMİR

Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Mukaddes ÖKTEN TURACI
Şubat 2021, 40 sayfa

Bu çalışmada, adi diferansiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar verildikten sonra, adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden bahsedilmiştir. Özel üçüncü-merteben adi diferansiyel denklemleri çözmek için dört-basamaklı altıncı-mertebe geliştirilmiş Runge-Kutta doğrudan yöntemi sunulmuştur. Bu yöntem iki-adımlı bir yöntemdir ve aynı mertebeden klasik Runge-Kuta yöntemi ile karşılaştırıldığında daha az basamak sayısı ile elde edilir. Önerilen yöntemin kararlılık polinomu verilmiştir. Önerilen yöntem literatürdeki yöntemlerle karşılaştırılmış ve yöntemin etkinliğini ve hassasiyetini göstermek için sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler : Özel üçüncü-mertebe adi diferansiyel denklemler, Runge-Kutta yöntemi, mertebe koşulları, geliştirilmiş Runge-Kutta doğrudan yöntemi (IRKD), Runge-Kutta doğrudan yöntemi (RKD), Runge- Kutta tipi (RKT) yöntem, kararlılık polinomu

Bilim Kodu : 20406

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON THE NUMERICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RUNGE-KUTTA TYPE METHODS

Merve ÖZDEMİR

Karabük University
Institute of Graduate Programs
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Mukaddes ÖKTEN TURACI

February 2021, 40 pages

In this study, after the basic concepts with related to ordinary differential equations have been given, the methods commonly used in numerical solutions of ordinary differential equations have been mentioned. The sixth-order improved Runge-Kutta direct method with four-stage has been presented for solving special third-order ordinary differential equations. This method is two-step in nature and is obtained with less number of steps compared to the classical Runge-Kuta method of the same order. Stability polynomial of the proposed method has been given. The proposed method has been compared with the methods in the literature and numerical results have been presented to show the efficiency and accuracy of the method.

Key Words : Special third-order ordinary differential equations, Runge-Kutta method, order conditions, improved Runge-Kutta direct method (IRKD), Runge-Kutta direct method (RKD), Runge-Kutta type (RKT) method, stability polynomial

Science Code : 20406

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması ile araştırılmasında, yürütülmesi ile oluşumunda ilgisini desteğini esirgemeyen, engin bilgi donanımları ile tecrübelerinden yararlandığım, bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel olarak aydınlatan sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Mukaddes ÖKTEN TURACI'ya ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK BİDEB'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili aileme manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KABUL ii
ÖZET iv
ABSTRACT vi
TEŞEKKÜR viii
İÇİNDEKİLER ix
ŞEKİLLER DİZİNİ xi
ÇİZELGELER DİZİNİ xii

BÖLÜM 1 1
GİRİŞ 1

BÖLÜM 2 4
TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ 4
2.2. ÇÖZÜMÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ 5
2.3. TAYLOR SERİ AÇILIMI 6

BÖLÜM 3 8
BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN YÖNTEMLER 8
3.1. EULER YÖNTEMİ 8
3.2. RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ 9
3.3. AÇIK İKİ-ADIMLI (TWO-STEP) RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ 11
3.4. GELİŞTİRİLMİŞ (IMPROVED) RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ 13

BÖLÜM 4 15

<u>**Sayfa**</u>

İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN YÖNTEMLER 15
4.1. RUNGE-KUTTA-NYSTROM YÖNTEMİ 15
4.2. İKİ-ADIMLI (TWO-STEP) RUNGE-KUTTA-NYSTROM YÖNTEMİ 17
4.3. GELİŞTİRİLMİŞ (IMPROVED) RUNGE-KUTTA-NYSTROM YÖNTEMİ 18

BÖLÜM 5 20
ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN YÖNTEMLER 20
5.1. RUNGE-KUTTA TİPİ YÖNTEMLER 20
5.2. DOĞRUDAN (DIRECT) RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ 21
5.3.GELİŞTİRİLMİŞ (IMPROVED) RUNGE-KUTTA DOĞRUDAN (DIRECT) YÖNTEMİ 23
5.3.1. Dört-Basamaklı Altıncı Mertebeden IRKD Yönteminin Mertebe Koşullarının Türetilmesi 24
5.3.2. Altıncı Mertebeden IRKD Yönteminin Türetilişi 26
5.3.3. Kararlılık Analizi 28
5.3.4. Sayısal Çalışmalar 30

BÖLÜM 6 36
SONUÇLAR 36
KAYNAKLAR 37
ÖZGEÇMİŞ 40

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa</u>

Şekil 5.1. Problem 1 için etkinlik eğrileri 31
Şekil 5.2. Problem 2 için etkinlik eğrileri 32
Şekil 5.3. Problem 3 için etkinlik eğrileri 33
Şekil 5.4. Problem 4 için etkinlik eğrileri 34

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 3.1. Runge-Kutta yöntemi için Butcher tablosu... 10

Çizelge 3.2. Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemi için Butcher Tablosu.. 11

Çizelge 3.3. Açık iki-adımlı Runge-Kutta yöntemi için Butcher tablosu.................. 12

Çizelge 3.4. Açık IRK yönteminin ($\alpha = 0$) katsayıları için tablo 14

Çizelge 4.1. Açık RKN yöntemi için Butcher Tablosu... 16

Çizelge 4.2. İki-adımlı (two-step) Runge-Kutta-Nyström yöntemi için Butcher Tablosu.. 18

Çizelge 4.3. Açık IRKN yöntemi için katsayılar tablosu... 19

Çizelge 5.1. Runge-Kutta tipi (RKT) yöntem için Butcher tablosu........................... 21

Çizelge 5.2. Açık RKD yöntemi için Butcher tablosu... 22

Çizelge 5.3. IRKD yöntemi için Butcher Tablosu 24

Çizelge 5.4 Açık dört-basamaklı altıncı-mertebeden IRKD yöntemi için Butcher Tablosu.. 27

Çizelge 5.5. Problem 1 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.................................... 34

Çizelge 5.6. Problem 2 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.................................... 35

Çizelge 5.7. Problem 3 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.................................... 35

Çizelge 5.8. Problem 4 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.................................... 35

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Mühendislik ve fen bilimlerine ait problemlerin çoğu diferansiyel denklemlerle matematiksel olarak modellenmektedir ve bu problemlerin çözümleri önemli bir yer tutmaktadır. Çoğu zaman diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmak mümkün olmamaktadır. Bu sebeple sayısal integrasyon yöntemleri çözümlerin davranışı hakkında fikir vermesi açısından büyük bir öneme sahiptir. Runge-Kutta yöntemleri adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için yaygın olarak kullanılan yöntemlerdir. Runge-Kutta yöntemleri birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sayısal integrasyonu için geliştirilmiş tek adımlı yöntemlerdir. Bu yöntemler birinci mertebeden tek bir adi diferansiyel denkleme uygulanabileceği gibi birden fazla birinci mertebeden adi diferansiyel denkleme de (birinci merteben adi diferansiyel denklem sistemi) uygulanabilir. Aynı zamanda Runge-Kutta yöntemleri yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak için kullanılabilir. Yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemin sayısal çözümleri, denklem birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülerek hesaplanabilir (Butcher, 2008; Lambert, 1991; Hairer vd., 1993). Bu ise hesaplama maliyetinde artışa sebep olur. Bu sebeple yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin doğrudan integrasyonu, yöntemin etkinliği açısından önem taşımaktadır.

Son zamanlarda üçüncü ve daha yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin doğrudan integrasyonu için lineer çok adımlı (linear multistep), hibrit (hybrid) ve blok (block) yöntemleri ortaya koyulmuştur (Olabode ve Yusuph, 2009; Awoyemi, 2003; Awoyemi ve Idowu, 2005; Bin Suleiman, 1989; Waeleh vd., 2011; Majid vd., 2010). Üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Runge-Kutta tipi yöntem ile doğrudan integrasyonunu içeren çalışmalar (Mechee vd., 2013; Hussain vd., 2015; Hussain vd., 2017; You ve Chen, 2013)'de verilmiştir.

Hussain vd. (2017), makalelerinde özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sayısal integrasyonu için dördüncü-mertebeden geliştirilmiş Runge-Kutta doğrudan (improved Runge-Kutta direct) yöntemini türetmişlerdir. Yöntemin mertebe koşulları dördüncü mertebeye kadar verilmiştir. Hussain vd. (2015) makalelerinde özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için beşinci-mertebeden geliştirilmiş Runge-Kutta doğrudan (improved Runge-Kutta direct) yöntemini türetmişlerdir. Bu çalışmada yöntemin mertebe koşulları altıncı mertebeye kadar verilmiştir.

Bu tez çalışmasında özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için önerilmiş olan geliştirilmiş Runge-Kutta doğrudan yöntemi ele alınmıştır. Özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek in dört-basamaklı altıncı-mertebeden açık bir yöntem inşa edilmiştir.

İkinci bölümde, adi diferansiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan yöntemlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, ikinci-mertebeden adi diferansiyel denklemleri doğrudan çözmek için kullanılan yöntemler verilmiştir.

Beşinci bölümde, üçüncü mertebeden adi diferansiyel denklemleri doğrudan çözmek için kullanılan yöntemler verilmiştir. Özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemleri doğrudan çözmek için önerilen yöntemlerden biri olan geliştirilmiş Runge-Kutta doğrudan (IRKD) yöntemi için literatürdeki çalışmalara devam edilmiştir. IRKD yöntemin yedinci mertebeye kadar mertebe koşulları verilmiştir. IRKD yönteminin kararlılık polinomu sunulmuştur. Özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için dört-basamaklı altıncı-mertebeden bir yöntemi türetilmiştir ve bu yöntemin bazı standart test problemleri üzerinde uygulamaları yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının sonuçlandırıldığı son bölüm olan altıncı bölümde ise yapılan çalışmaların değerlendirilmesi yapılmıştır ve gelecek çalışmalar için öneriler verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Fen ve mühendislikte, diferansiyel denklemler çok önemli matematiksel modellerdir. Çoğu fiziksel sistem bağımsız değişken olarak zaman ya da uzay değişkeninin kullanıldığı diferansiyel denklemler ile ifade edilebilir.

Diferansiyel denklem, bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme denir. Eğer bir diferansiyel denklem bir veya daha fazla bağımlı değişkenin tek bir bağımsız değişkene göre adi türevlerini içeriyorsa bu diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme ise kısmi diferansiyel denklem denir (Ross, 1984).

2.1. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Birinci ve yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin uygulamasında karşılaşılan problemlerin çoğu, diferansiyel denklem ve diferansiyel denklemin çözümünü sağlayan bir veya daha fazla ek koşulu içermektedir. Eğer ilgili ek koşulların hepsi bağımsız değişkenin aynı noktadaki değeri için verilir ise problem *başlangıç değer problemi* olarak adlandırılır. Koşullar bağımsız değişkenin birden fazla noktadaki değeri için verilir ise problem *sınır değer problemi* olarak adlandırılır (Ross, 1984).

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi, $y \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olmak üzere

$$y' = f(x, y(x)), \; y(x_0) = y_0, \; x \geq x_0 \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç değer problemlerinin genel formu

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\
&y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y'_0\,, y''(x_0) = y''_0\,, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

şeklinde verilebilir. Burada $x \geq x_0, y(x) \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathbb{R}^d$ ve $n \geq 2$.

2.2. ÇÖZÜMÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Verilen bir başlangıç değer probleminin bir çözüme sahip olup olmadığı ilk akla gelen sorudur. Bir başka soru ise, eğer çözümü var ise çözümün tek olup olmadığıdır. Bu soruların cevabı için, çözümün varlığını ve tekliğini ifade eden aşağıdaki tanım ve teorem verilmiştir.

Tanım 2.1. $f:[a,b]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olmak üzere, herhangi bir $x \in [a,b]$ ve $y, z \in \mathbb{R}^d$ için

$$\| f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\| \tag{2.3}$$

koşulunu sağlayan *Lipschitz sabiti* olarak bilinen bir L sabiti varsa f fonksiyonunun *ikinci değişkende Lipschitz koşulunu* sağladığı söylenir (Butcher, 2008).

Teorem 2.1. (Varlık ve teklik teoremi) $f:[a,b]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olmak üzere

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ \ y(a) = y_0$$

başlangıç değer problemi düşünülsün. Eğer f fonksiyonu birinci değişkende sürekli ve ikinci değişkende Lipschitz koşulunu sağlarsa, bu durumda bu problemin tek bir çözümü vardır (Butcher, 2008).

Bu teorem, başlangıç değer problemi için çözümlerin varlığını ve tekliğini garantilemektedir.

Bu tez çalışmasında varlık ve teklik teoreminin şartlarını sağlayan başlangıç değer problemleri üzerinde çalışılmıştır.

2.3. TAYLOR SERİ AÇILIMI

Her mertebeden türevlere sahip bir $y(x)$ fonksiyonu için, $y(x_n+h)$ fonksiyonunun x_n noktası civarındaki Taylor seri açılımı

$$y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\cdots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_n)+\cdots \tag{2.4}$$

şeklindedir. Eşitlik (2.4)'de sol taraftaki ifadenin sağ tarafa eşit olabilmesi için sağ taraftaki seri sonsuz terimli bir seri olmalıdır. Hesaplamada terimlerin hepsini kullanmak mümkün olmamaktadır. Bu sebeple sonlu sayıdaki terimlerle işlem yapılır. Yani h^p'ye kadar olan terimlerin kullanıldığı düşünülürse, seri

$$y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\cdots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_n)+R_{p+1} \tag{2.5}$$

halini alır. Burada kalan terim (ya da hata terimi) R_{p+1}

$$R_{p+1}=\frac{y^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}h^{p+1},\ \ x_n\le\xi\le x_n+h$$

şeklindedir. Eşitlik (2.5)

$$y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\cdots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_n)+O\left(h^{p+1}\right)$$

olarak da ifade edilebilir.

Taylor seri açılımları başlangıç değer problemlerine yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılabileceği gibi bu açılımlar daha çok başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerin türetilmesinde kullanılmaktadır.

BÖLÜM 3

BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN YÖNTEMLER

Diferansiyel denklemlerin çoğu analitik olarak çözülemez. Bazı bilim dallarında gerçek çözümden ziyade, gerçek çözüme sayısal bir yaklaşım elde etmek yeterlidir. Çeşitli bilim insanları tarafından adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine sayısal yaklaşımlar sağlayan adi diferansiyel denklemler için sayısal yöntemler genellikle kullanılır. Genel olarak sayısal yöntemler, tek adımlı (one step) ve çok adımlı (multistep) yöntemler olmak üzere iki gruba ayrılır. Aynı zamanda bu yöntemler açık ve kapalı yöntemler olarak da sınıflandırılabilir.

Tek adımlı yöntemlerde, bir sonraki adımdaki çözümün yaklaşık değerini hesaplamak için sadece bir önceki adımdaki noktanın bilgisi gerekmektedir. Çok adımlı yöntemlerde ise bir sonraki adımdaki çözümün yaklaşık değerini hesaplamak için mevcut adımda birden fazla önceki adımlardaki noktaların bilgisi gerekir. Bu bölümde adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan sayısal yöntemler ele alınacaktır.

3.1. EULER YÖNTEMİ

Eşitlik (2.1)'de verilen başlangıç değer probleminin çözümünde kullanılan en kolay yöntem Euler yöntemidir. Euler yöntemi

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n) \tag{3.1}$$

formundadır. Bu yöntem açık ve tek adımlı bir yöntemdir. Bu yöntemin düşük mertebeli yani birinci mertebeden bir yöntem olması kullanımını kısıtlar. Euler yöntemi lineer açık çok adımlı ve açık çok basamaklı (multistage, Runge-Kutta yöntemlerin temelini oluşturur. Bu yöntemler Euler yönteminden daha yüksek mertebeden yöntemler türetebilmek amacıyla geliştirilmiştir.

3.2. RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

Runge-Kutta yöntemleri, adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için yaygın olarak kullanılan açık ve kapalı yöntemler ailesinden oluşur. Bu yöntemler ilk olarak 1895 yılında Runge tarafından ortaya koyulmuştur. Bu yöntemlere Heun tarafından 1900 yılında ve Kutta tarafından 1901 yılında yapılan çalışmalarla daha da katkı sağlanmıştır (Butcher, 2008; Lambert, 1973).

Runge-Kutta yöntemleri, yüksek mertebeden türevlere ihtiyaç duymadan yüksek hassasiyette yaklaşımlar sağladığından genellikle tercih edilirler. Genel açık tek adımlı yöntemler

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \tag{3.2}$$

formunda yazılabilir.

Tanım 3.1:

$$y(x+h) - y(x) - h\phi(x, y(x), h) = O(h^{p+1}) \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlayan en büyük tamsayı p ise, (3.2) eşitliği ile verilen yöntemin *p. mertebeden* bir yöntem olduğu söylenir. Burada $y(x)$, (2.1) başlangıç değer probleminin analitik çözümüdür (Lambert, 1973).

Tanım 3.2:

$$\phi(x, y, 0) = f(x, y) \tag{3.4}$$

eşitliği sağlanırsa (3.2) eşitliği ile verilen yöntemin başlangıç değer problemi ile *tutarlı* olduğu söylenir (Lambert, 1973).

Bu ise tutarlı bir yöntemin en azından birinci mertebeden bir yöntem olduğunu ifade eder. Tek adımlı yöntemler için tutarlılık yakınsama için gerek ve yeter koşuldur (Lambert, 1973).

Eşitlik (2.1) ile verilen başlangıç değer problemi için genel açık s -basamaklı Runge-Kutta yöntemi

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \ i = 2, \ldots, s, \\
y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ile tanımlanır. Burada aşağıdaki koşulun

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i, \ i = 2, 3, \ldots, s \tag{3.6}$$

yani satır toplam koşulunun (row-sum conditition) sağlandığı kabul edilir. Runge-Kutta yönteminin katsayıları Butcher tablosu ile gösterilebilir. Butcher tablosu Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Runge-Kutta yöntemi için Butcher tablosu.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

En çok bilinen dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemi Çizelge 3.2' de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemi için Butcher tablosu.

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

3.3. AÇIK İKİ-ADIMLI (TWO-STEP) RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

Eşitlik (2.1) ile verilen başlangıç değer probleminin sayısal çözümü için açık iki-adımlı (two-step) Runge-Kutta (TSRK) yöntemleri

$$
\begin{aligned}
Y_i^j &= y_i + h\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\, f\left(x_i + c_k h, Y_i^k\right),\\
Y_{i-1}^j &= y_{i-1} + h\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\, f\left(x_{i-1} + c_k h, Y_{i-1}^k\right), \qquad (3.7)\\
y_{i+1} &= \theta y_{i-1} + (1-\theta) y_i + h\sum_{j=1}^{s}\left(v_j\, f\left(x_{i-1} + c_j h, Y_{i-1}^j\right) + w_j\, f\left(x_i + c_j h, Y_i^j\right)\right),\; j = 1,2,\ldots,s
\end{aligned}
$$

formuna sahiptir (Jackiewicz vd., 1995). Burada $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij},\ i = 1,2,\ldots,s$ eşitliği sağlanır. Bu yöntemler Butcher tarafından düşünülen genel lineer yöntemlerin bir alt sınıfıdır (Butcher 1987). İki-adımlı Runge-Kutta yöntemlerinin genel sınıfı (Jackiewicz ve Tracogna, 1995)'de verilmiştir. Bu yöntemler ardışık iki noktadaki basamak değerlerine bağlıdır. Y_{i-1}^j değeri bir önceki adımda hesaplandığından bu değeri hesaplamaya gerek yoktur. Bu sebeple sadece Y_i^j değerlerini içeren f

fonksiyon değerlerinin hesaplanması maliyeti belirler. İntegrasyona başlamak için y_0 başlangıç değerine ilave olarak, y_1 değerine ihtiyaç duyulur. Bu değer uygun mertebeli Runge-Kutta yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. (3.7) ile verilen yöntem

$$\sum_{j=1}^{s}\left(v_j + w_j\right) = 1 + \theta \tag{3.8}$$

koşulunu sağlarsa tutarlıdır ve $\theta \in (-1,1]$ ise sıfır-kararlıdır (zero-stable) (Jackiewicz vd., 1991). (3.7) yöntemi tutarlı ve sıfır kararlı ise yakınsaktır (Watt, 1967). (3.7) yönteminin katsayıları Çizelge 3.3.'te Butcher tablosu ile verilmiştir.

Çizelge 3.3. Açık iki-adımlı Runge-Kutta yöntemi için Butcher tablosu

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline \theta & \begin{array}{c} v^T \\ \\ w^T \end{array} \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} c_1 = 0 & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss-1} & \\ \hline & v_1 & v_2 & \cdots & v_{s-1} & v_s \\ \theta & & & & & \\ & w_1 & w_2 & \cdots & w_{s-1} & w_s \end{array}$$

3.4. GELİŞTİRİLMİŞ (IMPROVED) RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için klasik Runge-Kutta yöntemlerindeki k_i basamak değerlerine ek olarak k_{-i} basamak değerleri kullanılarak türetilmiş yöntemlerdir. k_{-i} basamak değerleri bir önceki adımda k_i basamak değerleri tarafından hesaplandığından ekstra fonksiyon hesaplaması gerektirmez. Bu yöntemler iki-adımlı (two-step) Runge-Kutta yöntemlerinin özel bir sınıfı olarak düşünülebilir. (Rabiei ve Ismail, 2011) makalelerinde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için üçüncü-mertebeden geliştirilmiş (improved) Runge-Kutta yöntemini türetmişlerdir.

(2.1) başlangıç değer problemini çözmek için s- basamaklı açık (explicit) geliştirilmiş Runge-Kutta (IRK) yönteminin genel formu

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_{-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1}),\\
k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), i = 2,3,\ldots,s,\\
k_{-i} &= f(x_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_{-j}), i = 2,3,\ldots,s,\\
y_{n+1} &= (1-\alpha)y_n + \alpha y_{n-1} + h\left(b_1 k_1 - b_{-1}k_{-1} + \sum_{i=2}^{s} b_i (k_i - k_{-i})\right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ile verilmiştir (Rabiei vd., 2013). Burada $0 \le \alpha \le 1$, $c_i \in [0,1]$, $i = 2,3,\ldots,s$ ve $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, $i = 2,3,\ldots,s$ satır toplam koşulu sağlanır. Rabiei vd. (2013) çalışmasında $\alpha = 0$ alınarak açık (explicit) IRK yöntemleri türetilmiştir. Bu yöntemler tek adımlı yöntem olmadığından y_0 başlangıç değerine ek olarak y_1 değeri uygun mertebeden tek adımlı yöntemlerle (Runge-Kutta yöntemi gibi) elde edilebilir. (3.9) yönteminin katsayıları Çizelge 3.4 ile temsil edilebilir.

Çizelge 3.4. Açık IRK yönteminin ($\alpha = 0$) katsayıları için tablo.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\,s-1} & & \\
\hline
b_{-1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s &
\end{array}
$$

BÖLÜM 4

İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN YÖNTEMLER

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler birinci mertebeden iki boyutlu adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülerek, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen yöntemler yardımıyla çözülebilir. Bu bölümde, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan doğrudan integrasyon yöntemleri verilecektir. Bu yöntemlerde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürmeye gerek yoktur.

4.1. RUNGE-KUTTA-NYSTROM YÖNTEMİ

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için türetilen yöntemlerin gelişimine katkı sağlayan Nyström (1925), ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için özel yöntemler önermiştir (Butcher, 2008; Hairer vd., 1993). Özel ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemi $y \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olmak üzere

$$y'' = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \tag{4.1}$$

formuna sahiptir.

(4.1) başlangıç değer problemini çözmek için açık s- basamaklı Runge-Kutta-Nyström (RKN) yöntemi

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + c_i h y_n' + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j),\ i = 2,3,\ldots,s,\\
y_{n+1} &= y_n + h y_n' + h^2 \left(\sum_{i=i}^{s} b_i k_i \right),\\
y_{n+1}' &= y_n' + h^2 \left(\sum_{i=i}^{s} b_i' k_i \right)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ile verilmiştir (Hairer vd., 1993; Mechee ve Rajihy, 2017). Bu yöntemler eşitlik (4.1)'de verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldükten sonra elde edilen başlangıç değer problemine Runge-Kutta yöntemlerinin uygulanmasıyla elde edilir. Bu şekilde oluşturulan birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sisteminin boyutu, başlangıçtaki ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem sisteminin boyutunun iki katı olur. (4.2) yöntemi tek adımlı bir yöntemdir ve yöntemin katsayıları Butcher tablosu ile ifade edilebilir. Açık Runge-Kutta-Nyström (RKN) yöntemi için Butcher tablosu Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Açık RKN yöntemi için Butcher Tablosu.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \\
 & b_1' & b_2' & \cdots & b_{s-1}' & b_s'
\end{array}
$$

4.2. İKİ-ADIMLI (TWO-STEP) RUNGE-KUTTA-NYSTROM YÖNTEMİ

Paternoster (2002) çalışmasında, (4.1) eşitliği ile verilen özel ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemini çözmek için yöntem türetilirken, ikinci mertebeden sistem birinci mertebeden iki boyutlu adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmüş ve bu sisteme iki-adımlı (two-step) Runge-Kutta yöntemi uygulandıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Bu uygulamanın sonucunda (4.1) ikinci mertebeden sistemi çözmek için s - basamaklı doğrudan (direct) yöntem

$$
\begin{aligned}
Y_{i-1}^{j} &= y_{i-1} + hc_j y'_{i-1} + h^2 \sum_{k=1}^{s} a_{jk} f\left(x_{i-1} + c_k h, Y_{i-1}^{k}\right),\ j = 1, \ldots, s, \\
Y_i^{j} &= y_i + hc_j y'_i + h^2 \sum_{k=1}^{s} a_{jk} f\left(x_i + c_k h, Y_i^{k}\right),\ j = 1, \ldots, s \\
y_{i+1} &= (1-\theta) y_i + \theta y_{i-1} + h \sum_{j=1}^{s} v_j y'_{i-1} + h \sum_{j=1}^{s} w_j y'_i \\
&\quad + h^2 \sum_{j=1}^{s} \left(\bar{v}_j f\left(x_{i-1} + c_j h, Y_{i-1}^{j}\right) + \bar{w}_j f\left(x_i + c_j h, Y_i^{j}\right) \right), \\
y'_{i+1} &= (1-\theta) y'_i + \theta y'_{i-1} + h \sum_{j=1}^{s} \left(v_j f\left(x_{i-1} + c_j h, Y_{i-1}^{j}\right) + w_j f\left(x_i + c_j h, Y_i^{j}\right) \right)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

şeklinde elde edilmiştir (Paternoster, 2002). (4.3) yöntemi iki-adımlı (two-step) Runge-Kutta-Nyström (TSRKN) olarak adlandırılır. Paternoster (2002) çalışmasında, aynı zamanda bu yöntemler ailesi içerisinde P-kararlı yöntemler türetmenin mümkün olduğu gösterilmiştir. İki-adımlı (two-step) Runge-Kutta-Nyström (TSRKN) yöntemi Çizelge 4.2’de verilen Butcher tablosu ile temsil edilebilir.

Çizelge 4.2. İki-adımlı (two-step) Runge-Kutta-Nyström yöntemi için Butcher tablosu.

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{s1} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_s \\
\theta & \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \cdots & \bar{w}_s \\
 & v_1 & v_2 & \cdots & v_s \\
 & w_1 & w_2 & \cdots & w_s
\end{array}
$$

4.3. GELİŞTİRİLMİŞ (IMPROVED) RUNGE-KUTTA-NYSTROM YÖNTEMİ

Rabiei vd. (2012) makalesinde, eşitlik (4.1) ile verilen özel ikinci-mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için IRK yöntemlerine (Rabiei ve Ismail, 2011; Rabiei ve Ismail, 2012) dayalı ve RKN yönteminin türetilişinde Dormand (1996) çalışmasındaki yaklaşım takip edilerek geliştirilmiş (improved) Runge-Kutta-Nyström (IRKN) yöntemi sunulmuştur. (4.1) özel ikinci-mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için s - basamaklı açık IRKN yönteminin genel formu

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$
$$k_{-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$
$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + hc_i y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), i = 2, 3, \dots, s,$$
$$k_{-i} = f(x_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + hc_i y'_{n-1} + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_{-j}), i = 2, 3, \dots, s,$$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{3}{2} h y'_n - \frac{1}{2} h y'_{n-1} + h^2 \left(\sum_{i=2}^{s} \bar{b}_i (k_i - k_{-i}) \right), \\
y'_{n+1} &= y'_n + h \left(b_1 k_1 - b_{-1} k_{-1} + \sum_{i=2}^{s} b_i (k_i - k_{-i}) \right)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

ile verilmiştir (Rabiei vd., 2012). Bu yöntemler iki-adımlı Runge-Kutta-Nyström yöntemlerinin özel bir sınıfır. IRKN yönteminde $\frac{1}{2} c_i^2 = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, $i = 2, 3, \ldots, s$ Nyström satır toplam koşulu kullanılabilir. (4.4) açık IRKN yönteminin katsayıları Çizelge 4.3'te verilen tablo ile ifade edilebilir.

Çizelge 4.3. Açık IRKN yöntemi için katsayılar tablosu.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\,s-1} & \\
\hline
b_{-1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \\
 & & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_{s-1} & \bar{b}_s
\end{array}
$$

BÖLÜM 5

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN YÖNTEMLER

Üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemlerle ilişkili başlangıç değer problemleri akışkanlar mekaniği, gök mekaniği, kuantum mekaniği, biyoloji, kimya ve kontrol mühendisliği gibi çeşitli uygulamalı alanlarda ortaya çıkmaktadır (You ve Chen, 2013). Bu mertebeden adi diferansiyel denklemler birinci mertebeden üç boyutlu adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülerek, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen yöntemler yardımıyla çözülebilir. Bu bölümde, üçüncü mertebeden adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan doğrudan integrasyon yöntemleri verilecektir. Bu yöntemlerde üçüncü mertebeden adi diferansiyel denklemi birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürmeye gerek yoktur.

5.1. RUNGE-KUTTA TİPİ YÖNTEMLER

You ve Chen (2013) makalelerinde $y \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olmak üzere

$$y''' = f(x, y(x)),\; y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y'_0,\; y''(x_0) = y''_0 \tag{5.1}$$

formundaki özel üçüncü mertebe adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemi için Runge-Kutta tipi (RKT) doğrudan yöntemler önerdiler. Bu yöntemlerin türetilişi ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümü için sunulan yöntemlere benzerdir. Yani üçüncü mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi üç boyutlu birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldükten sonra bu sisteme klasik Runge-Kutta yöntemleri uygulanarak elde edilir.

(5.1) ile verilen özel üçüncü mertebe adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemi için s - basamaklı Runge-Kutta tipi (RKT) yöntem

$$
\begin{aligned}
Y_i &= y_n + hc_i y_n' + \frac{1}{2} c_i^2 h^2 y_n'' + h^3 \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f\left(x_n + c_j h, Y_j\right),\ i = 1,\dots,s, \\
y_{n+1} &= y_n + hy_n' + \frac{1}{2} h^2 y_n'' + h^3 \sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i f(x_n + c_i h, Y_i), \\
y_{n+1}' &= y_n' + hy_n'' + h^2 \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i f(x_n + c_i h, Y_i), \\
y_{n+1}'' &= y_n'' + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_n + c_i h, Y_i)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

şeması ile tanımlanmıştır (You ve Chen, 2013). Çizelge 5.1'de verilen Butcher tablosu ile (5.2) şeması ifade edilebilir. You ve Chen (2013) çalışmasında daha detaylı bilgiye ulaşılabilir.

Çizelge 5.1. Runge-Kutta tipi (RKT) yöntem için Butcher tablosu.

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{s1} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & \tilde{b}_s \\
 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_s \\
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
\end{array}
$$

5.2. DOĞRUDAN (DIRECT) RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

Mechee vd. (2013) makalesinde (5.1) ile verilen özel üçüncü mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için doğrudan (direct) Runge-Kutta (RKD) yöntemi geliştirilmiştir. (5.1) başlangıç değer problemini çözmek için s - basamaklı doğrudan (direct) Runge-Kutta (RKD) yönteminin genel formu

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_i &= f\left(x_n + c_i h, y_n + hc_i y_n' + \frac{1}{2} c_i^2 h^2 y_n'' + h^3 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right), \; i = 2, \ldots, s, \\
y_{n+1} &= y_n + hy_n' + \frac{1}{2} h^2 y_n'' + h^3 \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \\
y_{n+1}' &= y_n' + hy_n'' + h^2 \sum_{i=1}^{s} b_i' k_i, \\
y_{n+1}'' &= y_n'' + h \sum_{i=1}^{s} b_i'' k_i
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

ile verilmiştir (Mechee vd., 2013). (5.3) şemasında $i \le j$ için $a_{ij} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, s, \; j = 1, 2, \ldots, s$ oluyorsa yöntem açık yöntemdir. Aksi takdirde ise kapalı yöntemdir. RKD yöntemi Çizelge 5.2'de verilen Butcher tablosu ile ifade edilebilir.

Çizelge 5.2. Açık RKD yöntemi için Butcher tablosu.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \\
 & b_1' & b_2' & \cdots & b_{s-1}' & b_s' \\
 & b_1'' & b_2'' & \cdots & b_{s-1}'' & b_s''
\end{array}
$$

5.3.GELİŞTİRİLMİŞ (IMPROVED) RUNGE-KUTTA DOĞRUDAN (DIRECT) YÖNTEMİ

Hussain vd. (2017) ve Hussain vd. (2015) makalelerinde sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için sunulan geliştirilmiş (improved) Runge-Kutta (Rabiei ve Ismail, 2012) ve geliştirilmiş (improved) Runge-Kutta-Nyström (Rabiei vd., 2012) yöntemlerine ve Runge-Kutta-Nyström yönteminin mertebe koşullarını (order conditions) türetmek için Dormand (1996) tarafından önerilen yaklaşıma dayalı olarak özel üçüncü-mertebe adi diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilmiş (improved) Runge-Kutta doğrudan (direct) (IRKD) yöntemini oluşturmuşlardır. Bu yöntemler k_i basamak değerlerine ilave olarak k_{-i} basamak değerlerini kullanır. k_{-i} basamak değerleri önceki adımda $i \geq 2$ için k_i basamak değerlerinden elde edildiğinden maliyeti k_i basamak değerlerinin hesaplanması belirler. Eşitlik (5.1) ile verilen özel üçüncü-mertebe adi diferansiyel denklemleri çözmek için s - basamaklı açık IRKD yönteminin genel formu

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_{-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1}),\\
k_i &= f\Big(x_n + c_i h,\, y_n + hc_i y'_n + \frac{1}{2}h^2 c_i^2 y''_n + h^3 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\Big), i = 2,3,\ldots,s,\\
k_{-i} &= f\Big(x_{n-1} + c_i h,\, y_{n-1} + hc_i y'_{n-1} + \frac{1}{2}h^2 c_i^2 y''_{n-1} + h^3 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_{-j}\Big), i = 2,3,\ldots,s,\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{3}{2}hy'_n - \frac{1}{2}hy'_{n-1} + \frac{5}{12}h^2 y''_n - \frac{5}{12}h^2 y''_{n-1} + h^3 \sum_{i=2}^{s} b''_i (k_i - k_{-i}),\\
y'_{n+1} &= y'_n + \frac{3}{2}hy''_n - \frac{1}{2}hy''_{n-1} + h^2 \sum_{i=2}^{s} b'_i (k_i - k_{-i}),\\
y''_{n+1} &= y''_n + h\left(b_{-1}k_{-1} + b_1 k_1 + \sum_{i=2}^{s} b_i (k_i - k_{-i})\right)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

ile verilmiştir (Hussain vd., 2017; Hussain vd., 2015). Eşitlik (5.4) ile verilen IRKD yöntemi Çizelge 5.3'te verilen Butcher tablosu ile ifade edilebilir.

Çizelge 5.3. IRKD yöntemi için Butcher Tablosu

c	A
b_{-1}	b^T
	b'^T
	b''^T

Çizelge 5.3'te b_i, b'_i, b''_i, c_i ve a_{ij} $i = 2,\ldots,s,\ j = 1,\ldots,s-1$ IRKD yönteminin katsayılarıdır. Hussain vd. (2017) makalesinde IRKD yönteminin mertebe koşulları dördüncü mertebeye kadar verilmiştir ve üç basamaklı dördüncü mertebeden IRKD yöntemi türetilmiştir. Bu yöntemin katsayılarını elde ederken beşinci mertebe koşullarından yararlanmışlardır. Üç basamaklı dördüncü mertebeden IRKD yöntemini IRKD4 ile göstermişlerdir. Hussain vd., (2015) makalesinde IRKD yönteminin mertebe koşulları altıncı mertebeye kadar verilmiştir ve dört basamaklı beşinci mertebeden IRKD yöntemi türetilmiştir. Bu yöntemin katsayılarını elde ederken altıncı mertebe koşullarından yararlanmışlardır. Dört basamaklı beşinci mertebeden IRKD yöntemini IRKD5 ile göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında, dört-basamaklı altıncı mertebeden geliştirilmiş Runge-Kutta doğrudan (IRKD) yöntemi türetilmiştir. Bu çalışma (Ökten Turacı ve Özdemir, 2021) makalesinin içeriğinde yer almaktadır.

5.3.1. Dört-Basamaklı Altıncı Mertebeden IRKD Yönteminin Mertebe Koşullarının Türetilmesi

(5.4) şeması ile verilen IRKD yöntemi ($s = 4$) için mertebe koşulları elde edilirken Taylor seri açılımları kullanılır. y, y' ve y'' için IRKD yönteminin mertebe koşulları belirlenirken tam ve sayısal çözümlerin Taylor seri açılımları karşılaştırılır. Böylece lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Cebirsel hesaplamalar MAPLE (bilgisayar cebir paketi) yardımıyla yapılır. Mertebe koşulları elde edilirken

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \frac{c_i^3}{6}, \; i = 2,\ldots,s \tag{5.5}$$

sadeleştirme kabulünün (satır-toplam koşulu) geçerli olduğu kabul edilmiştir. (5.5) koşulu mertebe koşullarının sayısını azaltma etkisine sahiptir. Taylor seri açılımı açık dört-basamaklı ($s = 4$) IRKD yöntemine (5.4) uygulanarak yedinci mertebeye kadar mertebe koşulları elde edilir. Açık dört-basamaklı IRKD yöntemi için yedinci mertebeye kadar mertebe koşulları aşağıda verilmiştir.

Birinci mertebe için mertebe koşulu:

$$b_1 + b_{-1} = 1. \tag{5.6}$$

İkinci mertebe için mertebe koşulu:

$$-b_{-1} + \sum_{i=2}^{4} b_i = \frac{1}{2}. \tag{5.7}$$

Ücüncü mertebe için mertebe koşulu:

$$\sum_{i=2}^{4} b_i c_i = \frac{5}{12}, \; \sum_{i=2}^{4} b_i' = \frac{5}{12}. \tag{5.8}$$

Dördüncü mertebe için mertebe koşulu:

$$\sum_{i=2}^{4} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \; \sum_{i=2}^{4} b_i' c_i = \frac{1}{6}, \; \sum_{i=2}^{4} b_i'' = \frac{1}{6}. \tag{5.9}$$

Beşinci mertebe için mertebe koşulu:

$$\sum_{i=2}^{4} b_i c_i^3 = \frac{31}{120}, \; \sum_{i=2}^{4} b_i' c_i^2 = \frac{31}{360}, \; \sum_{i=2}^{4} b_i'' c_i = \frac{31}{720}. \tag{5.10}$$

Altıncı mertebe için mertebe koşulu:

$$\sum_{i=2}^{4} b_i c_i^4 = \frac{1}{5}, \; \sum_{i=3}^{4}\sum_{j=2}^{i-1} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{120}, \; \sum_{i=2}^{4} b_i' c_i^3 = \frac{1}{20}, \; \sum_{i=2}^{4} b_i'' c_i^2 = \frac{1}{60}. \tag{5.11}$$

Yedinci mertebe için mertebe koşulu:

$$\sum_{i=2}^{4} b_i c_i^5 = \frac{41}{252},\ \sum_{i=3}^{4}\sum_{j=2}^{i-1} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{41}{15120},\ \sum_{i=3}^{4}\sum_{j=2}^{i-1} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{41}{6048}\ \sum_{i=2}^{4} b_i' c_i^4 = \frac{41}{1260},$$
$$\sum_{i=3}^{4}\sum_{j=2}^{i-1} b_i' a_{ij} c_j = \frac{41}{30240},\ \sum_{i=2}^{4} b_i'' c_i^3 = \frac{41}{5040}. \tag{5.12}$$

5.3.2. Altıncı Mertebeden IRKD Yönteminin Türetilişi

Açık dört-basamaklı ($s = 4$) altıncı-mertebeden IRKD yönteminin katsayılarını bulmak için altıncı mertebeye kadar olan (5.6)-(5.11) mertebe koşulları sağlanmalıdır. Bu durumda çözülmesi gereken mertebe koşulları on dört lineer olmayan denklem ve on yedi bilinmeyenden oluşur. Üç tane serbest parametre vardır. Serbest parametreler yedinci mertebe koşullarının hata normları minimize edilerek seçilebilir (Dormand, 1996).

Serbest parametreler $c_4 = \frac{977}{1250},\ a_{32} = \frac{1}{250},\ a_{43} = \frac{7}{125}$ olarak seçilirse, MAPLE yazılımı kullanılarak, altıncı mertebeden yöntemin özel bir örneği için katsayılar

$$c_2 = \frac{294899}{929240} + \frac{\sqrt{28739613497}}{929240},\ c_3 = \frac{294899}{929240} - \frac{\sqrt{28739613497}}{929240},$$

$$a_{21} = \frac{12767966323452527}{1203579958597536000} + \frac{2896358741\sqrt{28739613497}}{481431983439014400},$$

$$a_{31} = \frac{7953646489062383}{1203579958597536000} - \frac{2896358741\sqrt{28739613497}}{481431983439014400},$$

$$a_{41} = \frac{354532098940565086023983}{593310451002978515625000\,0} - \frac{1818055184522263389175622179\sqrt{28739613497}}{5683837681852119511619091796875000},$$

$$a_{42} = -\frac{536577903264900243950\,27}{14832761275074462890625\,00} + \frac{1818055184522263389175622179\sqrt{28739613497}}{5683837681852119511619091796875000},$$

$$b_{-1} = -\frac{61816471}{612184292},\ b_1 = \frac{674000763}{612184292},$$

$$b_2 = -\frac{1048942078819425}{16579814465985416} + \frac{1064170440740332566625\sqrt{28739613497}}{14294923788131709272362792\,56},$$

$$b_3 = -\frac{1048942078819425}{16579814465985416} - \frac{10641704407403325666625\sqrt{28739613497}}{1429492378813170927236279256},$$

$$b_4 = \frac{6793212890625}{12925775725721},$$

$$b_2' = \frac{176439290345}{952564843656} + \frac{91185668055555\sqrt{28739613497}}{4345451656746614670 64},$$

$$b_3' = \frac{176439290345}{952564843656} - \frac{91185668055555\sqrt{28739613497}}{434545165674661467064},$$

$$b_4' = \frac{11005859375}{238141210914},$$

$$b_2'' = \frac{155742885401}{1905129687312} - \frac{1000920575430018\sqrt{28739613497}}{547526908750073448500 64},$$

$$b_3'' = \frac{155742885401}{1905129687312} + \frac{1000920575430018\sqrt{28739613497}}{54752690875007344850064},$$

$$b_4'' = \frac{3017921875}{952564843656}$$

olarak verilebilir. Açık dört-basamaklı altıncı-mertebeden IRKD yöntemi Çizelge 5.4'te verilen Butcher tablosu ile ifade edilebilir. Açık dört-basamaklı altıncı-mertebeden IRKD yöntemini IRK4s6 ile göstereceğiz.

Çizelge 5.4 Açık dört-basamaklı altıncı-mertebeden IRKD yöntemi için Butcher tablosu.

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
b_{-1} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
 & & b_2' & b_3' & b_4' \\
 & & b_2'' & b_3'' & b_4''
\end{array}$$

5.3.3. Kararlılık Analizi

(5.4) şeması ile verilen IRKD yöntemi

$$
\begin{aligned}
Y_n^1 &= y_n,\\
Y_{n-1}^1 &= y_{n-1},\\
Y_n^i &= y_n + hc_i y_n' + \frac{1}{2}h^2 c_i^2 y_n'' + h^3 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f\left(x_n + c_j h, Y_n^j\right),\ i = 2,\ldots,s,\\
Y_{n-1}^i &= y_{n-1} + hc_i y_{n-1}' + \frac{1}{2}h^2 c_i^2 y_{n-1}'' + h^3 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f\left(x_{n-1} + c_j h, Y_{n-1}^j\right),\ i = 2,\ldots,s,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{3}{2}hy_n' - \frac{1}{2}hy_{n-1}' + \frac{5}{12}h^2 y_n'' - \frac{5}{12}h^2 y_{n-1}'' + h^3 \sum_{i=2}^{s} b_i''\Big(f\left(x_n + c_i h, Y_n^i\right) - f\left(x_{n-1} + c_i h, Y_{n-1}^i\right)\Big),\\
y_{n+1}' &= y_n' + \frac{3}{2}hy_n'' - \frac{1}{2}hy_{n-1}'' + h^2 \sum_{i=2}^{s} b_i'\Big(f\left(x_n + c_i h, Y_n^i\right) - f\left(x_{n-1} + c_i h, Y_{n-1}^i\right)\Big),\\
y_{n+1}'' &= y_n'' + h\left(b_{-1} f\left(x_{n-1}, Y_{n-1}^1\right) + b_1 f\left(x_n, Y_n^1\right) + \sum_{i=2}^{s} b_i \Big(f\left(x_n + c_i h, Y_n^i\right) - f\left(x_{n-1} + c_i h, Y_{n-1}^i\right)\Big)\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. IRKD yönteminin kararlılık polinomunu bulmak için, $y''' = -\lambda^3 y$ test denklemine (5.13) şeması ile verilen IRKD yöntemi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
Y_n &= N^{-1}\left(ey_n + hcy_n' + \frac{1}{2}h^2 c^2 y_n'' \right),\\
Y_{n-1} &= N^{-1}\left(ey_{n-1} + hcy_{n-1}' + \frac{1}{2}h^2 c^2 y_{n-1}'' \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{3}{2}hy_n' - \frac{1}{2}hy_{n-1}' + \frac{5}{12}h^2 y_n'' - \frac{5}{12}h^2 y_{n-1}'' - z^3 b''^T \left(Y_n - Y_{n-1}\right),\\
hy_{n+1}' &= hy_n' + \frac{3}{2}h^2 y_n'' - \frac{1}{2}h^2 y_{n-1}'' - z^3 b'^T \left(Y_n - Y_{n-1}\right),\\
h^2 y_{n+1}'' &= h^2 y_n'' - z^3 \left(b^T Y_n - \tilde{b}^T Y_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir (Hussain vd., 2017; Paternoster, 2012). Burada $z = \lambda h,\ e = (1,\ldots 1)^T$, A matrisi $i \le j$ iken $a_{ij} = 0$ elemanlı kesinlikle alt üçgensel matris olmak üzere $N = I + z^3 A,$

$Y_n = \left[Y_n^1, Y_n^2, \ldots, Y_n^s\right], \quad Y_{n-1} = \left[Y_{n-1}^1, Y_{n-1}^2, \ldots, Y_{n-1}^s\right], \quad c = \left[0, c_2, \ldots, c_s\right]^T,$

$c^2 = \left[0, c_2^2, \ldots, c_s^2\right]^T$, $b'' = \left[0, b_2'', \ldots, b_s''\right]^T$, $b' = \left[0, b_2', \ldots, b_s'\right]^T$, $b = \left[b_1, b_2, \ldots, b_s\right]^T$ ve $\tilde{b} = \left[b_{-1}, b_2, \ldots, b_s\right]^T$ şeklindedir. Y_n ve Y_{n-1} vektörleri yok edilirse

$$M(z^3) = \begin{pmatrix} 1 - z^3 b''^T N^{-1} e & z^3 b''^T N^{-1} e & \frac{3}{2} - z^3 b''^T N^{-1} c & -\frac{1}{2} + z^3 b''^T N^{-1} c & \frac{5}{12} - \frac{1}{2} z^3 b''^T N^{-1} c^2 & -\frac{5}{12} + \frac{1}{2} z^3 b''^T N^{-1} c^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z^3 b'^T N^{-1} e & z^3 b'^T N^{-1} e & 1 - z^3 b'^T N^{-1} c & z^3 b'^T N^{-1} c & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} z^3 b'^T N^{-1} c^2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^3 b'^T N^{-1} c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -z^3 b^T N^{-1} e & z^3 \tilde{b}^T N^{-1} e & -z^3 b^T N^{-1} c & z^3 \tilde{b}^T N^{-1} c & 1 - \frac{1}{2} z^3 b^T N^{-1} c^2 & \frac{1}{2} z^3 \tilde{b}^T N^{-1} c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \\ hy'_{n+1} \\ hy'_n \\ h^2 y''_{n+1} \\ h^2 y''_n \end{pmatrix} = M(z^3) \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ hy'_n \\ hy'_{n-1} \\ h^2 y''_n \\ h^2 y''_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

matris formu elde edilir. Eşitlik (5.14)'teki $M(z^3)$ matrisi IRKD yöntemi için kararlılık matrisi olarak adlandırılır. IRKD yönteminin kararlılık özellikleri

$$p(\mu, z^3) = \det\left(\mu I - M(z^3)\right) \tag{5.15}$$

kararlılık polinomunun köklerine bağlıdır.

5.3.4. Sayısal Çalışmalar

Bu bölümde altıncı mertebeden IRKD yönteminin etkinliğini ve hassasiyetini göstermek için standart test problemleri üzerinde yapılan sayısal çalışmaların sonuçları verilmiştir. İntegrasyona başlamak için y_0, y_0', y_0'' başlangıç değerlerine ilave olarak ihtiyaç duyulan y_1, y_1', y_1'' değerleri gerçek çözümden elde edilmiştir. Bununla birlikte, y_1, y_1', y_1'' değerleri uygun mertebeden tek adımlı (Runge-Kutta yöntemleri gibi) yöntemlerden de elde edilebilir. Elde edilen sonuçlar literatürdeki diğer iyi bilinen yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Tüm hesaplamalar MATLAB yardımıyla yapılmıştır. Hataları hesaplamak için L_∞ normu kullanılmıştır. Karşılaştırma için kullanılan yöntemler aşağıda verilmiştir.

- IRKD4s6: Bölüm 5.3.2.'de türetilen dört-basamaklı altıncı-mertebeden IRKD yöntemi.
- IRKD4: üç-basamaklı dördüncü-mertebeden IRKD yöntemi (Hussain vd., 2017).
- IRKD5: dört-basamaklı beşinci-mertebeden IRKD yöntemi (Hussain vd., 2015).
- RKD5: üç-basamaklı beşinci-mertebeden RKD yöntemi (Mechee vd., 2013).
- RKD6: dört-basamaklı altıncı-mertebeden RKD yöntemi (Mechee vd., 2016).
- RK6: klasik altıncı-mertebeden Runge-Kutta yöntemi (Butcher, 2008, syf.194).

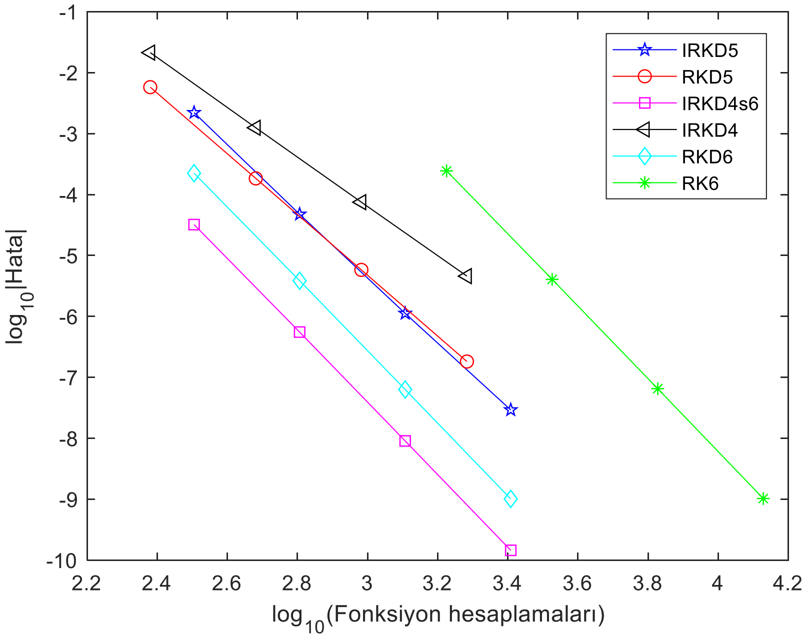
Problem 1: Lineer homojen olmayan

$$
\begin{aligned}
&y''' - y = \cos(x), \\
&y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1
\end{aligned}
$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır (You ve Chen, 2013). Problemin tam çözümü

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - \cos(x) - \sin(x)\right)$$

ile verilmektedir. Problem $h = 1/2^i$, $i = 3,\dots,6$ adım uzunlukları ile $[0,10]$ aralığında integrallenmiştir. Sonuçlar Şekil 5.1'de verilmiştir.

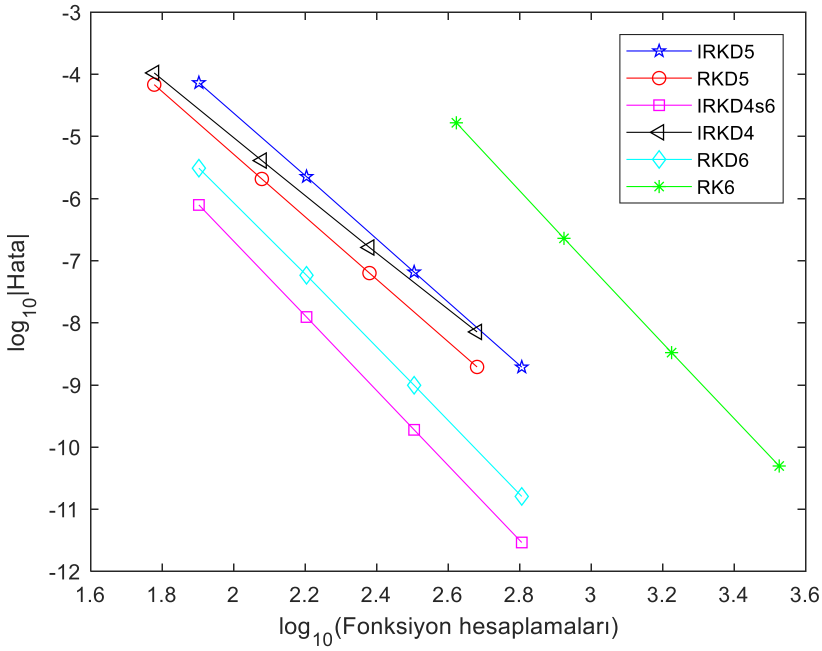


Şekil 5.1. Problem 1 için etkinlik eğrileri.

Problem 2: Lineer olmayan

$$y''' = y^2 + \cos^2(x) - \cos(x) - 1,$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır (Mechee vd., 2013). Problemin tam çözümü $y(x) = \sin(x)$ ile verilmektedir. Problem $h = 1/2^i$, $i = 2,\dots,5$ adım uzunlukları ile $[0,5]$ aralığında integrallenmiştir. Sonuçlar Şekil 5.2'de verilmiştir.

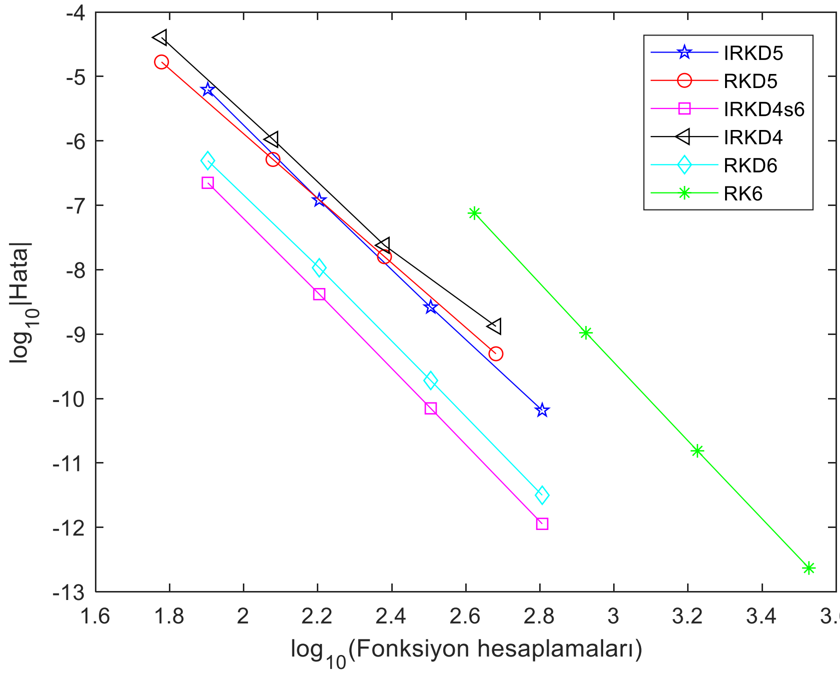


Şekil 5.2. Problem 2 için etkinlik eğrileri.

Problem 3: Lineer homojen

$$y''' = -y,$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır (Lee vd., 2020). Problemin tam çözümü $y(x) = e^{-x}$ ile verilmektedir. Problem $h = 1/2^i,\ i = 2,\ldots,5$ adım uzunlukları ile $[0,5]$ aralığında integrallenmiştir. Sonuçlar Şekil 5.3.'te verilmiştir.

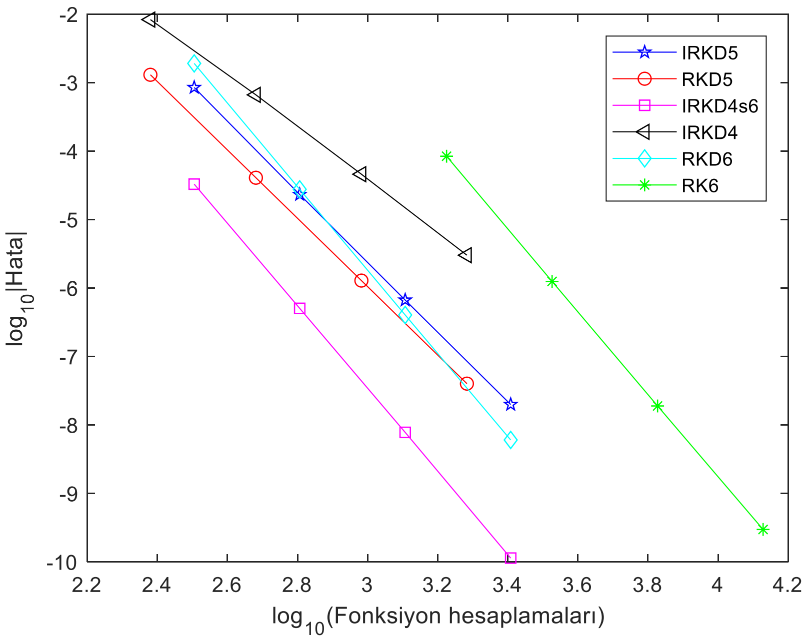


Şekil 5.3. Problem 3 için etkinlik eğrileri.

Problem 4: Lineer homojen

$$y''' = \left(12x - 8x^3\right)y,$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır (Hussain vd., 2015). Problemin tam çözümü $y(x) = e^{-x^2}$ ile verilmektedir. Problem $h = 1/2^i$, $i = 4,\ldots,7$ adım uzunlukları ile $[0,5]$ aralığında integrallenmiştir. Sonuçlar Şekil 5.4.'te verilmiştir.



Şekil 5.4. Problem 4 için etkinlik eğrileri.

Şekil 5.1, Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'ten IRKD4s6 yönteminin klasik Runge-Kutta yöntemi ve literatürden seçilen diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında daha etkili olduğu görülebilir.

Aynı zamanda, Problem 1, Problem 2, Problem 3 ve Problem 4 için IRKD4s6 yönteminin yakınsama oranı hesaplanmıştır. Sonuçlar her bir problem için sırasıyla Çizelge 5.5, Çizelge 5.6, Çizelge 5.7 ve Çizelge 5.8'de verilmiştir. Çizelgelerde "Mertebe" sütunu cebirsel yakınsama mertebesini ifade etmektedir.

Çizelge 5.5. Problem 1 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.

N	**Hata**	**Mertebe**
80	3.2086e−05	
160	5.5367e−07	5.86
320	9.0658e−09	5.93
640	1.4552e−10	5.96

Çizelge 5.6. Problem 2 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.

N	**Hata**	**Mertebe**
20	7.9048e−07	
40	1.2433e−08	5.99
80	1.9018e−10	6.03
160	2.9260e−12	6.02

Çizelge 5.7. Problem 3 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.

N	**Hata**	**Mertebe**
20	2.2313e−07	
40	4.1685e−09	5.74
80	7.0260e−11	5.89
160	1.1319e−12	5.96

Çizelge 5.8. Problem 4 için IRKD4s6 yönteminin sonuçları.

N	**Hata**	**Mertebe**
80	3.2925e−05	
160	5.0581e−07	6.02
320	7.8124e−09	6.02
640	1.1403e−10	6.10

Çizelge 5.5, Çizelge 5.6, Çizelge 5.7 ve Çizelge 5.8’den IRKD4s6 yönteminin sunulan dört problem için altıncı mertebeden bir davranış sergilediği gözlemlenebilir. Bu ise IRKD4s6 yönteminin altıncı mertebeden bir yöntem olduğunu doğrulamaktadır.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemleri doğrudan çözmek için dört-basamaklı altıncı-mertebeden açık bir IRKD yöntemi sunulmuştur. IRKD yönteminin yedinci mertebeye kadar mertebe koşulları verilmiştir. Önerilen yöntem daha az fonksiyon hesaplaması ile klasik Runge-Kutta yöntemi ile aynı mertebeye ulaşabilir. IRKD yönteminin kararlılık polinomu verilmiştir. Standart dört problem üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Sayısal sonuçlar önerilen yöntemin beklenilen mertebeden davrandığını ve literatürden seçilen dört problem için klasik Runge-Kutta yöntemi ve diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında rekabet edebilir veya hatta daha iyi olabildiğini göstermektedir.

Daha ileri çalışmalar için, özel üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için IRKD yöntemleri çözümün dördüncü türevini içeren yöntemlere genişletilebilir (Lee vd., 2020). IRKD yöntemleri üstel-trigonometrik uyarlama teknikleri kullanılarak salınımlı çözümlere sahip üçüncü-mertebeden adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerine uyarlanabilir.

KAYNAKLAR

Awoyemi, D. O., “A P-stable linear multistep method for solving general third order ordinary differential equations”, ***International Journal of Computer Mathematics***, 80 (8): 985-991 (2003).

Awoyemi, D. O. and Idowu, O. M., “A class of hybrid collocation methods for third-order ordinary differential equations”, ***International Journal of Computer Mathematics***, 82 (10):1287-1293 (2005).

Bin Suleiman, M., “Solving nonstiff higher order ODEs directly by the direct integration method”, ***Applied Mathematics and Computation***, 33(3):197-219 (1989).

Butcher, J. C., “The numerical analysis of ordinary differential equations. Runge-Kutta and general linear methods”, ***John Wiley***, New York (1987).

Butcher, J. C., “Numerical methods for ordinary differential equations”, ***John Wiley & Sons,*** Chichester, UK (2008).

Dormand, J. R., “Numerical methods for differential equations: A computational approach”, ***CRC press***, Boca Raton, FL (1996).

Hairer, E., Nørsett, S. P. and Wanner, G., “Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems”, ***Springer-Verlag***, Berlin (1993).

Hussain, K. A., Ismail, F., Senu, N., Rabiei, F. and Ibrahim, R., “Integration for special third-order ordinary differential equations using improved Runge-Kutta direct method”, ***Malaysian Journal of Science***, 34 (2): 172-179 (2015).

Hussain, K. A., Ismail, F., Senu, N. and Rabiei, F., “Fourth-order improved Runge–Kutta method for directly solving special third-order ordinary differential equations”, ***Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science***, 41: 429-437 (2017).

Jackiewicz, Z., Renaut, R. and Feldstein, A., “Two-step Runge-Kutta methods”, ***SIAM Journal on Numerical Analysis***,, 28 (4): 1165-1182 (1991).

Jackiewicz, Z., Renaut, R. A. and Zennaro, M., “Explicit two-step Runge-Kutta methods”, ***Applications of Mathematics***, 40 (6): 433-456 (1995).

Jackiewicz, Z. and Tracogna, S., “A general class of two-step Runge–Kutta methods for ordinary differential equations”, ***SIAM Journal on Numerical Analysis***, 32 (5): 1390-1427 (1995).

Lambert, J. D., “Computational methods in ordinary differential equations”, ***John Wiley & Sons***, New York (1973).

Lambert, J. D., “Numerical methods for ordinary differential systems: The initial value problem”, ***John Wiley & Sons***, New York (1991).

Lee, K. C., Senu, N., Ahmadian, A., and Ibrahim, S. N. I., “On two-derivative Runge–Kutta type methods for solving $u''' = f(x,u(x))$ with application to thin film flow problem”, ***Symmetry***, 12 (6):924 (2020).

Majid, Z. A., Suleiman, M. B. and Azmi, N. A., “Variable step size block method for solving directly third order ordinary differential equations”, ***Far East Journal of Mathematical Sciences***, 41 (1):63-73 (2010).

Mechee, M., Senu, N., Ismail, F., Nikouravan, B. and Siri, Z., “A three-stage fifth-order Runge-Kutta method for directly solving special third-order differential equation with application to thin film flow problem”, ***Mathematical Problems in Engineering***, 2013 (2013).

Mechee, M. S., Hussain, Z. M. and Mohammed, H. R., “On the reliability and stability of direct explicit Runge-Kutta integrators”, ***Global Journal of Pure and Applied Mathematics***, 12 : 3959-3975 (2016).

Mechee, M. S., and Rajihy, Y., “Generalized RK Integrators for Solving Ordinary Differential Equations: A Survey & Comparison Study”, ***Global Journal of Pure and Applied Mathematics***, 13 (7):2923-2949 (2017).

Nyström, E. J., “Über die numerische Integration von Differentialgleichungen”, ***Acta Soc. Sci. Fennicae***, 50 (13):1-54 (1925).

Olabode, B. T. And Yusuph, Y., “A new block method for special third order ordinary differential equations”, ***Journal of Mathematics and statistics***, 5(3):167-170 (2009).

Ökten Turacı, M. and Özdemir, M., “A sixth-order improved Runge–Kutta direct method for special third-order ordinary differential equations”, ***Numerical Methods for Partial Differential Equations***, 37 (2): 987-997 (2021).

Paternoster, B., “Two step Runge-Kutta-Nyström methods for $y'' = f(x,y)$ and $P-$ stability”, ***in International Conference on Computational Science, Springer-Verlag***, Berlin, Heidelberg, 459–466 (2002).

Rabiei, F. and Ismail, F., “Third-order Improved Runge-Kutta method for solving ordinary differential equation”, ***International Journal of Applied Physics and Mathematics***, 1 (3): 191-194 (2011).

Rabiei, F., Ismail, F., Norazak, S. and Abasi, N., “Construction of improved Runge-Kutta Nystrom method for solving second-order ordinary differential equations”, ***World Applied Sciences Journal***, 20 (12): 1685-1695 (2012).

Rabiei, F. and Ismail, F., "Fifth-order improved Runge–Kutta method with reduced number of function evaluations", ***Australian Journal of Basic and Applied Sciences***, 6 (3): 97-105 (2012).

Rabiei, F., Ismail, F. and Suleiman, M., "Improved Runge-Kutta methods for solving ordinary differential equations", ***Sains Malaysiana***, 42 (11):1679-1687 (2013).

Ross, S. L., "Differential Equations", Third Edition***, John Wiley & Sons, Inc***., New York (1984).

Waeleh, N., Majid, Z. A. and Ismail F., "A new algorithm for solving higher order IVPs of ODEs", ***Applied Mathematical Sciences***, 5 (56): 2795-2805 (2011).

Watt, J. M., "The asymptotic discretization error of a class of methods for solving ordinary differential equations", ***Proc. Camb. Phil. Soc***., 63: 461-472 (1967).

You, X. and Chen, Z., "Direct integrators of Runge–Kutta type for special third-order ordinary differential equations", ***Applied Numerical Mathematics***, 74:128-150 (2013).

ÖZGEÇMİŞ

Merve ÖZDEMİR 1996 yılında Ankara-Çankaya'da doğdu; ilk ve orta öğrenimini Karabük'ün Eskipazar ilçesinde tamamladı. Bolu-Gerede Anadolu Öğretmen Lisesinden mezun oldu. 2014 yılında Necmettin Erbakan Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Lise Matematik Öğretmenliği bölümüne başladı ve 2018 yılında bölüm 'birincisi' olarak mezun oldu. 2019 yılında Karabük Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2020 yılı eylül ayında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından Şırnak merkeze Matematik Öğretmeni olarak atandı ve halen burada görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Atatürk Mahallesi Lise Caddesi 8/7 Merkez-Şırnak

Tel : (542) 369 75 29

E-posta : mervee.ozdmrr@gmail.com