VARYASYONEL İTERASYON METODU VE UYGULAMALARI

Hüseyin KAYABAŞI

2022
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Murat DÜZ

VARYASYONEL İTERASYON METODU VE UYGULAMALARI

Hüseyin KAYABAŞI

T.C.
Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Murat DÜZ

KARABÜK
Haziran 2022

Hüseyin KAYABAŞI tarafından hazırlanan “VARYASYONEL İTERASYON METODU VE UYGULAMALARI” başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Murat DÜZ ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından Oy Birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 21/06/2022

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan : Prof. Dr. Ayşe NALLI (KBÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Tufan TURACI (PAÜ)	....

KBÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Hasan SOLMAZ ....
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Hüseyin KAYABAŞI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VARYASYONEL İTERASYON METODU VE UYGULAMALARI

Hüseyin KAYABAŞI

Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Murat DÜZ
Haziran 2022, 61 sayfa

Bu çalışmada, Varyasyonel iterasyon metodu (VİM) incelenmiştir. VİM lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılmaktadır. VİM tanıtılmış, daha sonra bazı uygulamalarına yer verilmiştir. İkinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemler için Lagrange çarpanının bulunuş yöntemi belirlenmiştir. Lagrange çarpanının ve ilk yaklaşım fonksiyonunun metodun başarısına etkisi üzerinde durulmuştur. Laplace dönüşüm formülleri, Sumudu ve Elzaki dönüşüm formüllerinin de VİM ile bulunabileceği gösterilmiş ve bu formüllere ulaşılmıştır. Ayrıca bu yöntemle kompleks diferansiyel denklemler de çözülmüştür. Son olarak VİM ile matematikte çok bilinen ve önemli sonuçları olan Airy denklemi, Burgers' denklemi ve KdV denklemlerinin çözümlerine ulaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler : Lagrange çarpanı, varyasyonel iterasyon metodu
Bilim Kodu **:** 20406

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

VARIATIONAL ITERATION METHOD AND APPLICATIONS

Hüseyin KAYABAŞI

Karabük University
Institute of Graduate Programs
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assoc. Prof. Dr. Murat DÜZ
June 2022, 61 pages

In this study, the variational iteration method (VIM) was investigated. VIM is used to find approximate solutions of linear or non-linear differential equations. VIM was introduced, and then some of its applications were included. The method of finding the Lagrange multiplier has been determined for the second order differential equations with constant coefficients. The effect of the Lagrange multiplier and the first approximation function on the success of the method is emphasized. It has been shown that Laplace transform formulas, Sumudu and Elzaki transform formulas can also be found with VIM and these formulas have been reached. In addition, complex differential equations are solved with this method. Finally, the solutions of Airy equation, Burgers' equation and KdV equations, which are well known and have important results in mathematics, have been reached with VIM.

Key Word : Lagrange multiplier, variational iteration method
Science Code : 20406

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tüm aşamalarında bana destek olan danışman hocam Doç. Dr. Murat DÜZ'e, KBÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve tez süresince yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

λ : Lagrange çarpanı

$\tilde{y}_n$: Kısıtlanmış varyasyon

$y_0(t)$: İlk yaklaşım fonksiyonu

$\mathcal{L}$: Laplace dönüşümü

S : Sumudu dönüşümü

E : Elzaki dönüşümü

KISALTMALAR

VİM : Varyasyonel iterasyon metodu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Diferansiyel denklemler matematik, mühendislik başta olmak üzere bilimin pek çok alanında kullanılan denklemlerdir. Bu denklemlerin çözülebilmesi birçok yeniliğin oluşmasında ve bilimin ilerlemesinde etkilidir. Ne yazık ki birçok diferansiyel denklemi çözebilmek mümkün değildir. Lineer diferansiyel denklemler için genellikle çözümler bulunabilmekte ama özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin kesin çözümleri çoğunlukla bulunamamaktadır.

Tam çözüme ulaşılması güç olan denklemlerin yaklaşık çözümlerine ulaşmak için diferansiyel dönüşüm metodu, homotopi pertürbasyon metodu gibi birçok yöntem kullanılmaktadır. Varyasyonel iterasyon metodu (VİM) da çözüme adım adım yaklaşma prensibi üzerine kurulu bir yöntemdir. Bu metot ile bazı denklemlerde tam çözüme de ulaşılabilmektedir. Ayrıca birçok denklemde varyasyonel iterasyon metodu diğer yöntemlerden çok daha hızlı çözüme yaklaşmaktadır.

Daha önceleri de bu yönteme benzer yöntemler üzerine çalışılmıştır. 1978 yılında Inokuti öncülüğünde tanımlanan Lagrange çarpanı kullanılarak oluşturulan yaklaşım metodu, VİM için bir temel oluşturmaktadır[1].

Lineer ve lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılan ve oldukça etkili bir yöntem olan VİM literatürde ilk kez matematikçi Ji-Huan He tarafından 1997 yılında tanımlanmıştır[2].

Daha sonraki zamanlarda VİM kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır. Bazı önemli çalışmalar şöyle sıralanabilir:

2005 yılında Abdou ve Soliman bu yöntem ile Burger's denklemini çözmüşlerdir[3]. Ayrıca Abdou ve Soliman aynı yıl KdV denklemini de bu yöntemle çözmüşlerdir[4]. 2006 yılında Bildik ve Konuralp VİM, diferansiyel dönüşüm metodu ve Adomian ayrıştırma metodu ile diferansiyel denklem çözümleri yapmış, VİM ile çözüme daha hızlı yaklaşmışlardır[5]. 2007 yılında Wang ve He integro-diferansiyel denklemler için VİM kullanmışlardır[6]. Wazwaz 2008 yılında lineer ve lineer olmayan Schrodinger denklemini VİM ile çözmüştür[7]. Aynı yıl Hemeda da bu yöntem ile dalga denklemini çözmüştür[8]. Yine 2008 yılında Yusufoğlu Klein-Gordon denklemi için bu yöntemi kullanmıştır[9]. 2009 yılında Altıntan ve Uğur Sturm-Liouville denklemi için VİM çalışması yapmışlardır[10]. 2012 yılında Sakar, Erdoğan ve Yıldırım kesirli Fornberg-Witham denklemi üzerine çalışmışlardır[11]. 2020 yılında He ve Latifizadeh lineer olmayan diferansiyel denklemleri VİM ile çözerken kullanılan genel bir nümerik algoritma çalışması yapmışlardır[12].

Bu tez çalışmasında ise Airy denklemi VİM ile çözülmüştür. Kompleks diferansiyel denklemler için VİM çalışması yapılmıştır. Ayrıca ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemler için Lagrange çarpanı belirleme yöntemi belirlenmiş, böylece bu tür denklemler için sadece bir iterasyonla çözüme ulaşılmıştır.

BÖLÜM 2

VARYASYONEL İTERASYON METODU

2.1. VARYASYON

Varyasyonel analiz genellikle fonksiyonellerin extremum değerlerinin belirlenmesi ile ilgilenir. Fonksiyonel, belirli şartları sağlayan tüm fonksiyonların oluşturduğu bir küme gibi düşünülebilir. Genellikle

$$I[Y(x)] = \int_a^b F\big(x, Y(x), Y'(x)\big)dx \tag{2.1}$$

biçimindedir. $y(x)$ fonksiyonu (2.1) fonksiyonelini extremum yapan fonksiyon olsun. $\eta(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\eta(a) = \eta(b) = 0$ şartını sağlayan bir fonksiyon ve ε bir parametre olmak üzere, $Y(x)$ fonksiyonu $y(x) + \varepsilon\eta(x)$ şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda (2.1) integrali

$$I[\varepsilon] = \int_a^b F\big(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)\big)dx \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) denkleminde türev alınırsa

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial\big(y(x) + \varepsilon\eta(x)\big)}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial\big(y'(x) + \varepsilon\eta'(x)\big)}\eta'(x) \right)dx \tag{2.3}$$

ifadesi elde edilir. (2.3) ifadesi $\varepsilon = 0$ için

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial\big(y(x)\big)}\eta(x) - \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\big(y'(x)\big)}\right)\right]dx + \frac{\partial F}{\partial(y')}\eta(x)\Big|_a^b = 0 \qquad (2.4)$$

şeklindedir. Buradan

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta dx = 0 \qquad (2.5)$$

elde edilir. Bu ifade δI ile gösterilir ve I nın varyasyonu denir. (2.5) denklemindeki

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (2.6)$$

eşitliğine Euler-Lagrange denklemi denir. (2.1) formundaki fonksiyonellerin extremum değerleri için (2.6) denklemini sağlamaları gerekir. Varyasyonel analiz hakkında daha ayrıntılı bilgiler ilgili kaynaklarda mevcuttur[13-14].

2.2. VARYASYONEL İTERASYON METODU

L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$Ly(x) + Ny(x) = g(x)$$

denkleminin yaklaşık çözümü için kullanılan bir yöntemdir. Yöntem varyasyonel analiz alt yapısını kullanır. Bunun için başlangıç şartlarını sağlayan bir başlangıç fonksiyonu yardımıyla aşama aşama gerçek çözüme yaklaşılır. Bu işlem için bir düzeltme fonksiyoneli kullanılır.
Düzeltme fonksiyoneli

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(x,t)\{Ly_n(t) + N\tilde{y}_n(t) - g(t)\}dt$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada y_n, n. mertebeden yaklaşık çözüm, $\tilde{y}_n$ kısıtlanmış varyasyon, λ Lagrange çarpanıdır.

Düzeltme fonksiyoneline $\delta y_n(0) = 0$ olmak üzere varyasyon uygulanır.

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x,t)\{Ly_n(t) + N\tilde{y}_n(t) - g(t)\}dt$$

Buradaki Euler-Lagrange denklemi çözülerek Lagrange çarpanı bulunur.

$y_0(x)$, ilk yaklaşım fonksiyonudur. Keyfi seçilir ancak başlangıç koşullarını sağlaması gerekir.

İlk yaklaşım fonksiyonundan hareketle her aşamada gerçek çözüme adım adım yaklaşılır. Sonuçta çözüm

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

eşitliği ile elde edilir.

2.3. LAGRANGE ÇARPANI

Lagrange çarpanı varyasyonel analiz ile bulunabilen genel bir çarpandır. Genellikle λ ile gösterilir. Bir diferansiyel denklemde VİM kullanabilmek için mutlaka önce Lagrange çarpanı belirlenmelidir.

2.3.1. Lagrange Çarpanının Bulunuşu

Temel denklemler için Lagrange çarpanları hesaplanabilir ancak günümüzde bilgisayar programları ile daha karmaşık denklemler için de Lagrange çarpanı hesaplanabilmektedir. VİM'in kullanılabildiği temel denklemler için kullanılabilen Lagrange çarpanları derlenmiş ve aşağıda verilmiştir[15-17].

$$\begin{aligned} &y' + f(y, y') = 0 \\ &\lambda(x,t) = -1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &y'' + f(y, y', y'') = 0 \\ &\lambda(x,t) = t - x \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &y''' + f(y, y', y'', y''') = 0 \\ &\lambda(x,t) = -\frac{1}{2}(t-x)^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + f\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \\ &\lambda(x,t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}(t-x)^{n-1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &y'(x) + cy(x) + f(y, y') = 0 \\ &\lambda(x,t) = -e^{c(t-x)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} &y''(x) - c^2 y(x) + f(y, y', y'') = 0 \\ &\lambda(x,t) = \frac{1}{2c}\left[e^{c(t-x)} - e^{c(x-t)}\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &y''(x) + w^2 y(x) + f(y, y', y'') = 0 \\ &\lambda(x,t) = \frac{1}{w} sin[w(t-x)] \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} &y'(x) + w(x)y(x) + f(y, y') = 0 \\ &\lambda(x,t) = -e^{\left\{\int_0^t w(\xi)d\xi - \int_0^x w(\xi)d\xi\right\}} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + f(y, y', y'') = 0 \\ &\lambda(x,t) = \frac{t^2}{x} - t \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$y''(x) + \frac{c}{x}y'(x) + f(y, y', y'') = 0 \quad ise$$
$$\lambda(x,t) = \frac{t^c}{(c-1)x^{c-1}} - \frac{t}{c-1}, \quad c \geq 1, c \in N \tag{2.16}$$

Bu çarpanlar birçok denklemi VİM ile çözmemiz için yeterlidir. Ancak daha yüksek boyutlu diferansiyel denklemlerle karşılaşıldığı zaman VİM kullanmak zorlaşır. Bu durumda Lagrange çarpanı bilgisayar programları yardımıyla bulunabilir veya başka yöntemlerle denklem çözülmeye çalışılır.

Lagrange çarpanı çoğunlukla kısmi integrasyon kullanılarak elde edilir. Aşağıda bu çarpanlardan birkaç tanesinin elde edilişi gösterilmiştir.

Örneğin (2.8) ile verilen $y'' + f(y, y', y'') = 0$ denklemini ele alalım. Düzeltme fonksiyoneli

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(x,t)\{y_n''(t) + f(y, y', y'')(t)\}dt$$

olur. Varyasyon uygulanırsa

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x,t)\left\{y_n''(t) + \tilde{f}(y, y', y'')(t)\right\}dt$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + [\lambda(x,t)\delta y_n'(t) - \lambda'(x,t)\delta y_n(t)]\big|_0^x + \delta \int_0^x \lambda''(x,t)y_n(t)dt$$

elde edilir. Buradan

$$\left.\begin{aligned} 1-\ \lambda'(x,x)&=0\\ \lambda(x,x)&=0\\ \lambda''(x,t)&=0 \end{aligned}\right\}$$

sistemi çözülürse

$$\lambda(x,t)=t-x$$

elde edilir.

Şimdi de (2.11) ile verilen $y'(x)+cy(x)+f(y,y')=0$ denklemini ele alalım. Düzeltme fonksiyoneli

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)+\int_0^x \lambda(x,t)\{y_n{}'(t)+cy_n(t)+f(t)\}dt$$

olur. Varyasyon uygulanırsa

$$\delta y_{n+1}(x)=\delta y_n(x)+\delta\int_0^x \lambda(x,t)\{y_n{}'(t)+cy_n(t)+f(t)\}dt$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta y_{n+1}(x)=\delta y_n(x)+\lambda(x,t)\delta y_n(t)\Big|_0^x - \delta\int_0^x \lambda'(x,t)y_n(t)dt+\delta\int_0^x \mathrm{c}.\lambda(x,t)y_n(t)dt$$

elde edilir. Buradan

$$\left.\begin{aligned} 1+\ \lambda(x,x)&=0\\ \lambda'(x,t)-c\,\lambda(x,t)&=0 \end{aligned}\right\}$$

sistemi çözülürse

$$\lambda(x,t) = -e^{c(t-x)}$$

elde edilir.

2.3.2 İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklemler İçin Lagrange Çarpanının Bulunuşu

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \tag{2.17}$$

denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklemdir. Bu denklem için Lagrange çarpanını hesaplayalım. Sadece homojen kısmı incelemek yeterlidir. Burada

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.18}$$

denklemine karakteristik denklem denir. Lagrange çarpanını bulmak için iterasyon

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(x,t)\{ay_n''(t) + by_n'(t) + cy_n(t)\}dt$$

olur. Varyasyon uygulanırsa

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x,t)\{ay_n''(t) + by_n'(t) + cy_n(t)\}dt$$

elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \lambda(x,t)\{a\delta y_n{}'(t) + b\delta y_n(t)\}\Big|_0^x - \lambda'(x,t)a\delta y_n(t)\Big|_0^x$$
$$- \delta\int_0^x b\lambda'(x,t)y_n(t)dt + \delta\int_0^x \mathrm{c}\lambda(x,t)y_n(t)dt$$
$$+ \delta\int_0^x \lambda''(x,t)ay_n(t)dt$$

elde edilir. Buradan

$$\left.\begin{array}{c} 1 + b\,\lambda(x,x) - \ a\lambda'(x,x) = 0 \\ a\lambda''(x,t) - b\,\lambda'(x,t) + c\lambda(x,t) = 0 \\ \lambda(x,x) = 0 \end{array}\right\}$$

sistemi çözülmelidir. Buradan

$$\lambda'(x,x) = \frac{1}{a}$$

elde edilir.

$$a\lambda''(x,t) - b\,\lambda'(x,t) + c\lambda(x,t) = 0 \qquad (2.19)$$

denklemine göre Lagrange çarpanı bulunacaktır. (2.19) için karakteristik denklem

$$ar^2 - br + c = 0 \qquad (2.20)$$

olur.

Buradaki karakteristik denkleme göre üç durum incelenecektir.

İlk durum olarak (2.18) karakteristik denklem için diskriminant pozitif olsun ve karakteristik denklemin kökleri r_1 ve r_2 olsun. Bu durumda (2.20) denklemine ait olan karaktersitik denklemin kökleri de $-r_1$ ve $-r_2$ olur. Buradan

$$\lambda(x,t) = f_1(x)e^{-r_1 t} + f_2(x)e^{-r_2 t}$$

olmalıdır.

$\lambda(x,x) = 0$ ve $\lambda'(x,x) = \frac{1}{a}$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)e^{-r_1 x} + f_2(x)e^{-r_2 x} &= 0 \\ -r_1 f_1(x)e^{-r_1 x} - r_2 f_2(x)e^{-r_2 x} &= \frac{1}{a} \end{aligned}\right\}$$

sistemi çözülürse

$$f_1(x) = -\frac{e^{r_1 x}}{a(r_1 - r_2)}$$
$$f_2(x) = \frac{e^{r_2 x}}{a(r_1 - r_2)}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{gathered} ay'' + by' + cy = 0 \\ ar^2 + br + c = 0 \text{ için farklı reel kökler } r_1 \text{ ve } r_2 \\ \lambda(x,t) = \frac{(e^{x-t})^{r_2} - (e^{x-t})^{r_1}}{a(r_1 - r_2)} \end{gathered} \tag{2.21}$$

durumu elde edilir.

İkinci durum olarak (2.18) karakteristik denklem için diskriminant sıfır olsun ve karakteristik denklemin kökü r olsun. Bu durumda (2.20) denklemine ait olan karaktersitik denklemin kökü de $-r$ olur. Buradan

$$\lambda(x,t) = [f_1(x) + f_2(x)t]e^{-rt}$$

olmalıdır.

$\lambda(x,x) = 0$ ve $\lambda'(x,x) = \frac{1}{a}$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} [f_1(x) + f_2(x)x]e^{-rx} &= 0 \\ -rf_1(x)e^{-rx} + (1-rx)f_2(x)e^{-rx} &= \frac{1}{\text{a}} \end{aligned}\right\}$$

sistemi çözülürse

$$f_1(x) = -\frac{xe^{rx}}{a}$$
$$f_2(x) = \frac{e^{rx}}{a}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{gathered} ay'' + by' + cy = 0 \\ ar^2 + br + c = 0 \text{ için eşit reel kökler } r \\ \lambda(x,t) = \frac{e^{r(x-t)}(t-x)}{a} \end{gathered} \tag{2.22}$$

durumu elde edilir.

Üçüncü durum olarak (2.18) karakteristik denklem için diskriminant negatif olsun ve karakteristik denklemin kökleri $m \mp ni$ olsun. Bu durumda (2.20) denklemine ait olan karaktersitik denklemin kökleri de $-m \mp ni$ olur. Buradan

$$\lambda(x,t) = [f_1(x)cosnt + f_2(x)sinnt]e^{-mt}$$

olmalıdır.

$\lambda(x,x) = 0$ ve $\lambda'(x,x) = \frac{1}{a}$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} [f_1(x)cosnx + f_2(x)sinnx]e^{-mx} &= 0 \\ (-nsinnx - mcosnx)f_1(x)e^{-mx} + (ncosnx - msinnx)f_2(x)e^{-mx} &= \frac{1}{\text{a}} \end{aligned}\right\}$$

sistemi çözülürse

$$f_1(x) = -\frac{sinnxe^{mx}}{an}$$
$$f_2(x) = \frac{cosnxe^{mx}}{an}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{gathered} ay'' + by' + cy = 0 \\ ar^2 + br + c = 0 \text{ için karmaşık kökler } m \mp ni \\ \lambda(x,t) = \frac{e^{m(x-t)}sin[n(t-x)]}{an} \end{gathered} \tag{2.23}$$

durumu elde edilir.

2.3.3 Lagrange Çarpanının Çözüme Yaklaşmaya Etkisi

Lagrange çarpanı bulunurken kısıtlanmış varyasyon uygulanan terim sayısı az olursa, analitik çözüme daha hızlı ulaşılabileceği düşünülmektedir.

<u>Örnek 2.3.3.1:</u>

$$\left.\begin{aligned} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

başlangıç şartıyla verilen denklemin analitik çözümü $y(x) = e^x$ dir. İlk yaklaşım fonksiyonu olarak $y_0(x) = 1$ alınabilir.

Bu denklem (2.7) formunda olduğu için Lagrange çarpanını (-1) alarak VİM uygulanırsa

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x [y_n'(t) - y(t)]dt$$

$y_0 = 1$

$y_1 = 1 + x$

$y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$y_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

şeklinde adım adım analitik çözüme yaklaşılır.

Denklem ayrıca (2.11) formunda olduğu için Lagrange çarpanını $\lambda(x,t) = -e^{x-t}$ alırsak

$y_0 = 1$

$y_1 = e^x$

$y_2 = e^x$

olduğundan analitik çözüme ulaşılır. Bu durum Lagrange çarpanı belirlenirken kısıtlanmış varyasyon uygulanmazsa çözüme hızlı ulaşabileceğini göstermektedir.

Örnek 2.3.3.2: $\left.\begin{array}{c} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3 \end{array}\right\}$ başlangıç şartı ile verilen denklemin çözümünü bulalım.

Verilen denklem (2.8) formunda olduğu için $\lambda(x,t) = t - x$ alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartını sağlayan $y_0(x) = 3x + 2$ olsun.

$y_0(x) = 3x + 2$

$y_1(x) = 3x + 2 + \int_0^x (t - x)\,(6t - 5)dt$

$y_1(x) = 2 + 3x + \frac{5x^2}{2} - 2x^3$

$y_2(x) = 2 + 3x + \frac{5x^2}{2} - 2x^3 + \int_0^x (t - x)\,(-21t + 5t^2 - 4t^3)dt$

$$y_2(x) = 2 + 3x + \frac{5x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{5x^4}{6} - x^5$$

şeklinde adım adım analitik çözüm olan $y(x) = e^x + e^{2x}$ çözümüne yaklaşılır. Buradaki ilk dört terim ile analitik çözümün ilk dört terimi aynıdır.

Ayrıca verilen denklem (2.21) formunda olduğu için Lagrange çarpanı olarak $\lambda(x,t) = e^{x-t} - e^{2x-2t}$ alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartını sağlayan $y_0(x) = 3x + 2$ olsun.

$$y_0(x) = 3x + 2$$

$$y_1(x) = 3x + 2 + \int_0^x (e^{x-t} - e^{2x-2t})(6t - 5)dt$$

$$y_1(x) = e^x + e^{2x}$$

$$y_2(x) = e^x + e^{2x}$$

Böylece genel çözüm olan $y(x) = e^x + e^{2x}$ çözümüne ulaşılmış olur.

Burada da Lagrange çarpanı bulunurken kısıtlanmış varyasyon uygulandığındaçözüme adım adım yaklaşılmakta ancak kısıtlanmış varyasyon uygulanmadığında sadece bir iterasyonla çözüme ulaşılmaktadır.

2.4. İLK YAKLAŞIM FONKSİYONUNUN ÇÖZÜME YAKLAŞMAYA ETKİSİ

İlk yaklaşım fonksiyonu keyfi seçilebilir ancak başlangıç şartlarını sağlamalıdır. İlk yaklaşım fonksiyonu gerçek çözüme yakın olursa iterasyon ile çözüme daha hızlı yaklaşılabileceği düşünülmektedir. Bu yüzden ilk yaklaşım fonksiyonunun seçimi önemlidir.

Örnek 2.4.1: (2.24) denkleminin analitik çözümü $y(x) = e^x$ dir.

Bu denklem (2.7) formunda olduğu için Lagrange çarpanını (-1) alarak VİM uygulayalım.

Önce denklemi $f(x)$ türünden yazıp ilk yaklaşım fonksiyonu olarak $f_0(x) = 1$ alalım.

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - \int_0^x [f_n{}'(t) - f(t)]dt$$

iterasyonu kullanılır.

$$f_0 = 1$$
$$f_1 = 1 + x$$
$$f_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$f_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

şeklinde adım adım analitik çözüme yaklaşılır.

Şimdi denklemi $g(x)$ türünden yazıp ilk yaklaşım fonksiyonu olarak $g_0(x) = 1 + x$ alalım.

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) - \int_0^x [g_n{}'(t) - g(t)]dt$$

iterasyonu kullanılır.

$$g_0 = 1 + x$$
$$g_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$g_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
$$g_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

şeklinde adım adım analitik çözüme yaklaşılır.

Şimdi de denklemi $h(x)$ türünden yazıp ilk yaklaşım fonksiyonu olarak $h_0(x) = cosx$ alalım.

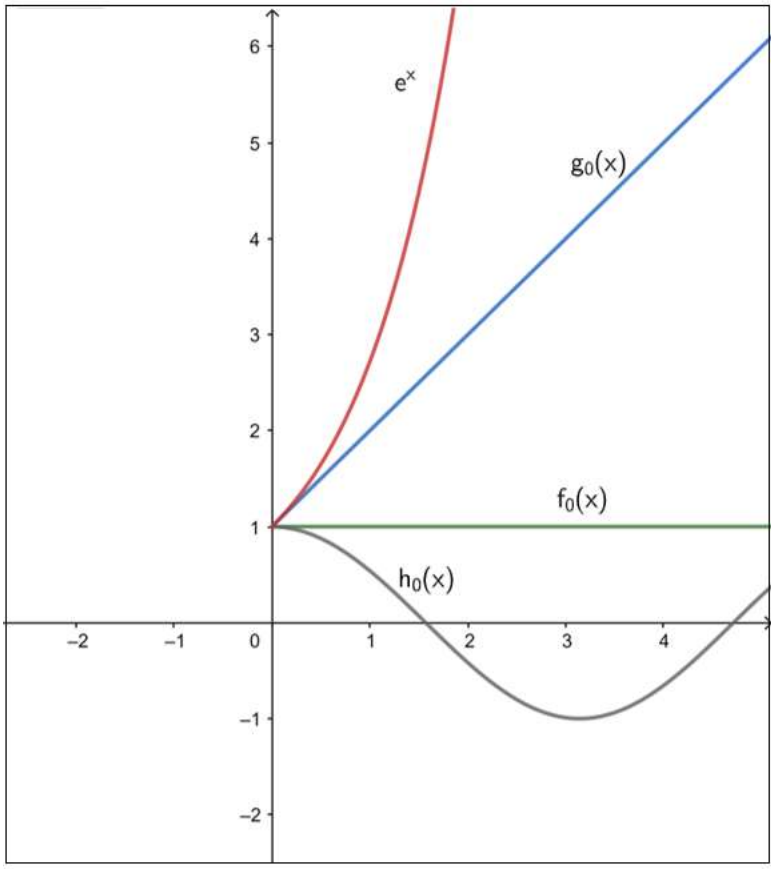
$$h_{n+1}(x) = h_n(x) - \int_0^x [h_n{}'(t) - h(t)]dt$$

iterasyonu kullanılır.

$$h_0 = cosx$$
$$h_1 = 1 + sinx$$
$$h_2 = 2 + x - cosx$$
$$h_3 = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} - sinx$$

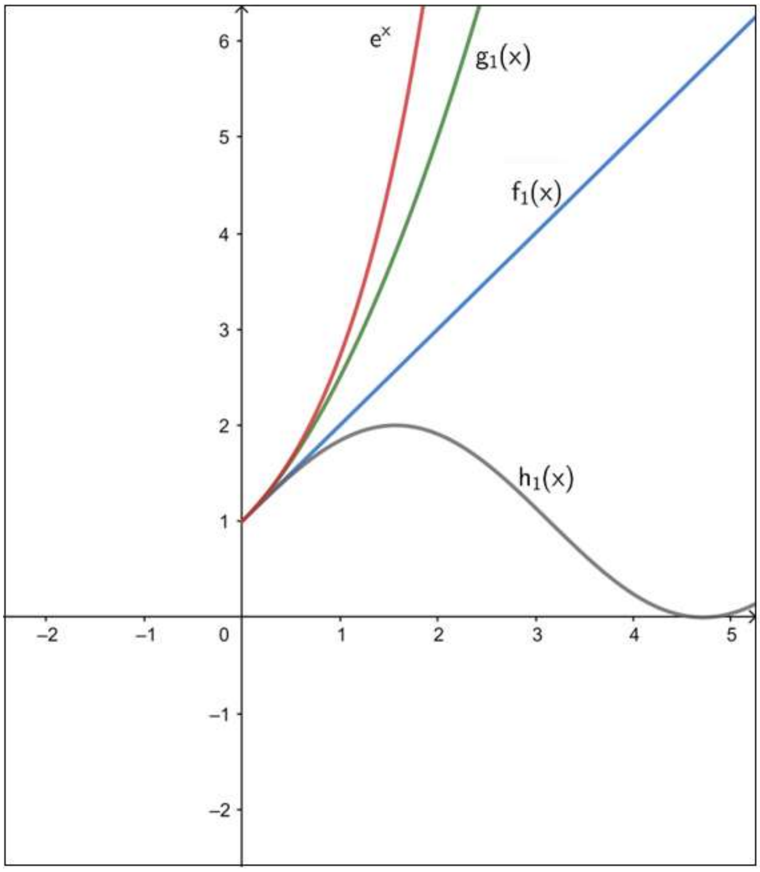
şeklinde adım adım analitik çözüme yaklaşılır.

Şekil 2.1’de ilk yaklaşım fonksiyonları karşılaştırılmıştır.



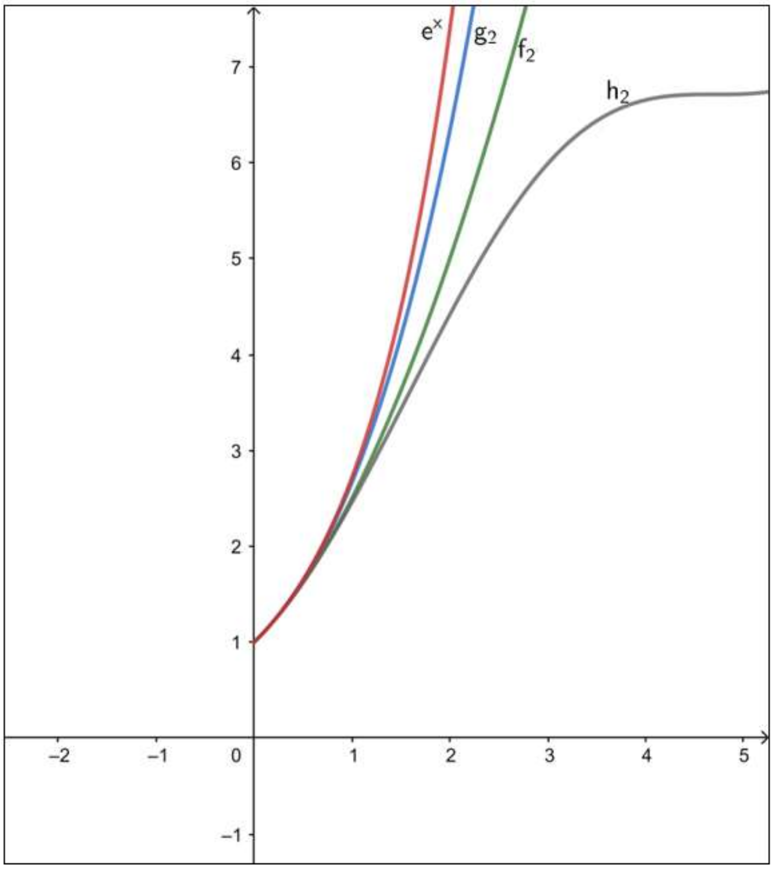
Şekil 2.1. İlk yaklaşım fonksiyonları

Şekil 2.2'de bir iterasyondan elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.



Şekil 2.2. Bir iterasyonla elde edilen sonuçlar

Şekil 2.3'te iki iterasyondan elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.



Şekil 2.3. İki iterasyonla elde edilen sonuçlar

Şekil 2.1'de ilk yaklaşım fonksiyonlarının analitik çözüme yakınlığı görülmektedir. Şekil 2.2'de bir iterasyondan elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Şekil 2.3'te iki iterasyondan elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu durum da ilk yaklaşım fonksiyonunun seçiminin önemini göstermektedir.

2.5. VARYASYONEL İTERASYON METODU UYGULAMALARI

Örnek 2.5.1: $\left.\begin{matrix} y' - y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{matrix}\right\}$ başlangıç şartı ile verilen nonlineer denklemin çözümünü bulalım. Verilen denklem (2.7) formunda olduğu için Lagrange çarpanı olarak $\lambda(x,t) = -1$ alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartını sağlayan $y_0(x) = 1$ olsun.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x [y_n{}'(t) - y_n{}^2(t)]dt$$

iterasyonu kullanılabilir.

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$y_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}$$

elde edilir. Her adımda analitik çözüm olan $y(x) = \frac{1}{1-x}$ çözümüne yaklaşılır.

Örnek 2.5.2: $\left.\begin{matrix} y'' - 2y' + 5y = 5x - 2 \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3 \end{matrix}\right\}$ başlangıç şartı ile verilen denklemin çözümünü bulalım.

Eşitliğin sol tarafı (2.23) türünde olduğu için Lagrange çarpanı

$$\lambda(x,t) = \frac{e^{x-t}\sin(2t - 2x)}{2}$$

olarak anılabilir.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \frac{e^{x-t}\sin(2t-2x)}{2}[y_n''(t) - 2y_n'(t) + 5y_n(t) - 5t + 2]dt$$

iterasyonu kullanılabilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmalıdır. Buna göre

$$y_0(x) = 3x$$
$$y_1(x) = x + e^x sin2x$$
$$y_2(x) = x + e^x sin2x$$

analitik çözümü elde edilir.

Örnek 2.5.3: $\left.\begin{aligned} u_t + u_{xx} &= 0 \\ u(x,0) &= cosx \end{aligned}\right\}$ başlangıç şartı ile verilen denklemin çözümünü bulalım. Bu denklemin çözümü $u(x,t)$ formundadır ve t değişkenine göre verilen denklem (2.7) formunda olduğu için Lagrange çarpanı olarak (-1) alınabilir.

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,t)\right)dt$$

iterasyonu ile çözüme yaklaşalım.

$$u_0(x,t) = cosx$$
$$u_1(x,t) = cosx(1+t)$$
$$u_2(x,t) = cosx\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)$$
$$u_3(x,t) = cosx\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right)$$

Bu şekilde devam edilirse $u(x,t) = e^t cosx$ çözümüne yaklaşıldığı görülür.

Örnek 2.5.4: $\left.\begin{array}{r} y' - y = 0 \\ y(1) = e \end{array}\right\}$ ile verilen başlangıç-değer problemini inceleyelim. Verilen denklem (2.11) formunda olduğu için Lagrange çarpanı olarak $\lambda(x,t) = -e^{x-t}$ alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartını sağlayan $y_0(x) = e$ olsun.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_1^x e^{x-t}[y_n'(t) - y_n(t)]dt$$

iterasyonu kullanılabilir.

$$y_0(x) = e$$
$$y_1(x) = e^x$$
$$y_2(x) = e^x$$

elde edilir. Bu durumda analitik çözüm olan $y(x) = e^x$ çözümüne ulaşılmış olur.

Örnek 2.5.5: $\left.\begin{array}{r} y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$ başlangıç şartı ile verilen denklemi inceleyelim. Bu denklem (2.14) formunda olduğu için $\lambda(x,t) = -e^{\left\{\int_0^t \xi d\xi - \int_0^x \xi d\xi\right\}} = -e^{\frac{t^2-x^2}{2}}$ elde edilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartını sağlayan $y_0(x) = 1$ olsun.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x e^{\frac{t^2-x^2}{2}}\{y_n'(t) - ty_n(t)\}dt$$

iterasyonu kullanılabilir.

$$y_0(x) = 1$$
$$y_1(x) = 1 - \int_0^x e^{\frac{t^2-x^2}{2}} t dt = 1 - \left(e^{\frac{t^2-x^2}{2}}\right)\Bigg|_0^x = e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$y_2(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

çözümü elde edilir. Bu zaten denklemin genel çözümüdür. Sadece bir iterasyonla çözüme ulaşılmış olur.

Örnek 2.5.6: $\left.\begin{array}{c} y' + xy - x^3 - 2x = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$ başlangıç şartı ile verilen denklemi inceleyelim. Bu denklem (2.14) formunda olduğu için

$\lambda(x,t) = -e^{\left\{\int_0^t \xi d\xi - \int_0^x \xi d\xi\right\}} = -e^{\frac{t^2-x^2}{2}}$ elde edilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartını sağlayan $y_0(x) = 1$ olsun.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x e^{\frac{t^2-x^2}{2}} \{y_n{}'(t) + t y_n(t) - t^3 - 2t\} dt$$

iterasyonu kullanılabilir.

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x e^{\frac{t^2-x^2}{2}} (t + t^3) dt = 1 + \int_0^x e^{\frac{t^2-x^2}{2}} t dt + \int_0^x e^{\frac{t^2-x^2}{2}} t^3 dt$$

Son integralde $\frac{t^2}{2} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$y_1(x) = 1 + \left(e^{\frac{t^2-x^2}{2}}\right)\Bigg|_0^x + e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^{\frac{x^2}{2}} e^u 2u du$$

$$y_1(x) = 1 + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} (2(u-1)e^u) \Bigg|_0^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y_1(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \left[(x^2 - 2)e^{\frac{x^2}{2}} + 2\right]$$

$$y_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2$$

$$y_2(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2$$

analitik çözümü elde edilir.

Örnek 2.5.7: $\left.\begin{array}{l} y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x} \\ y(0) = 5, \;\; y'(0) = 11 \end{array}\right\}$ başlangıç şartı ile verilen denklemin çözümünü bulalım. Eşitliğin sol tarafı (2.22) türünde olduğu için Lagrange çarpanı

$$\lambda(x,t) = e^{2x-2t}(t-x)$$

olarak anılabilir.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x e^{2x-2t}(t-x)[y_n''(t) - y_n'(t) + 4y_n(t) - 4e^{2t}]dt$$

iterasyonu kullanılabilir. İlk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmalıdır. Buna göre

$$y_0(x) = 11x + 5$$
$$y_1(x) = (5 + x + 2x^2)e^{2x}$$
$$y_2(x) = (5 + x + 2x^2)e^{2x}$$

analitik çözümü elde edilir.

BÖLÜM 3

LAPLACE DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİNİN VİM İLE BULUNUŞU

Laplace dönüşümü birçok diferansiyel denklemin çözümü için kullanılabilen bir yöntemdir. Yöntem için bazı Laplace dönüşüm formülleri kullanılır. Bu yöntem bazı diferansiyel denklem çözümlerinde kolaylıklar sağlamaktadır. Ayrıca başka yöntemler için de alternatif olarak kullanılabilir.

Genel olarak aşağıdaki şekilde Laplace dönüşüm formülleri bulunur[18].

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty f(x).e^{-sx}\,dx \tag{3.1}$$

(3.1) integrali hesaplanabilen her fonksiyon için Laplace dönüşümüdür.

Önemli bazı Laplace dönüşüm formülleri Çizelge 3.1' de görülmektedir. VİM ile bu formüllere nasıl ulaşılacağı gösterilecektir[19]. Ayrıca burada aşağıdaki dönüşümler iki farklı Lagrange çarpanı ile gösterilmekte, böylece Lagrange çarpanının çözüme yaklaşmaya etkisi de görülmektedir.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(x)]}$
1	$\frac{1}{s}$
x	$\frac{1}{s^2}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$cosax$	$\frac{s}{a^2+s^2}$
$sinax$	$\frac{a}{a^2+s^2}$

Çizelge 3.1. Laplace dönüşüm formülleri

$$\begin{aligned} y' - sy &= q(x) \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

başlangıç şartı ile verilen denklemi inceleyelim. Burada VİM kullanılırken yararlanılan ilk yaklaşım fonksiyonu $y_0(x) = 0$ olur. Denklem çözümü için integral çarpanı uygulanırsa

$$(y.e^{-sx})' = q(x).e^{-sx} \tag{3.3}$$

$$e^{-sx}.y\Big|_0^\infty = \int_0^\infty q(x).e^{-sx}\,dx \tag{3.4}$$

durumu elde edilir. (3.4) denkleminin sağ tarafı (3.1) eşitliğindeki $\mathcal{L}[q(x)]$ değerine eşit olduğundan

$$\mathcal{L}[q(x)] = e^{-sx}.y\Big|_0^\infty \tag{3.5}$$

elde edilir. Demek ki diferansiyel denklemin çözümü olan y değerine yukarıdaki işlem uygulanırsa Laplace dönüşüm formülü olan $\mathcal{L}[q(x)]$ değerine ulaşılmaktadır.

Örnek 3.1: (3.2) denkleminde $q(x) = 1$ için Laplace dönüşüm formülüne ulaşalım.

$$y_0 = 0 \tag{3.6}$$

başlangıç değeri ile aşağıdaki iterasyon kullanılır. Ayrıca (3.2) denklemi (2.7) formunda olduğundan Lagrange çarpanını (-1) alabiliriz.

$$y_{n+1} = y_n - \int_0^x \{y_n{}'(t) - sy_n(t) - q(t)\}\, dt \tag{3.7}$$

Buradaki (3.7) iterasyonu yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = x$$
$$y_2 = x + \frac{sx^2}{2}$$
$$y_3 = x + \frac{sx^2}{2} + \frac{s^2x^3}{6}$$
$$y_4 = x + \frac{sx^2}{2} + \frac{s^2x^3}{6} + \frac{s^3x^4}{24}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{e^{sx} - 1}{s}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{L}[1] = e^{-sx}.\frac{e^{sx} - 1}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1 - e^{-sx}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}\,, (s > 0) \tag{3.8}$$

elde edilir.

Aynı zamanda (3.2) denklemi (2.11) formunda olduğu için Lagrange çarpanını

$\lambda(x,t) = -e^{-s(t-x)} = -e^{s(x-t)}$ alabiliriz. Bu durumda

$$y_{n+1} = y_n - \int_0^x e^{s(x-t)}\{y_n'(t) - sy_n(t) - q(t)\}\,dt \qquad (3.9)$$

iterasyonu kullanılmalıdır. Buradan

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \frac{e^{sx}-1}{s}$$
$$y_2 = \frac{e^{sx}-1}{s}$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (3.8) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 3.2:</u> (3.2) denkleminde $q(x) = x$ için Laplace dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \frac{x^2}{2}$$
$$y_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{sx^3}{6}$$
$$y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{sx^3}{6} + \frac{s^2x^4}{24}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{e^{sx}-1-sx}{s^2}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{L}[x] = e^{-sx}.\frac{e^{sx}-1-sx}{s^2}\bigg|_0^\infty = \frac{1-e^{-sx}-sxe^{-sx}}{s^2}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s^2}\,,(s>0) \qquad (3.10)$$

elde edilir.

Aynı zamanda (2.11), (3.6) ve (3.9) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \frac{e^{sx} - 1 - sx}{s^2}$$
$$y_2 = \frac{e^{sx} - 1 - sx}{s^2}$$

Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (3.10) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 3.3:</u> (3.2) denkleminde $q(x) = x^n$ için Laplace dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$y_2 = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{sx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
$$y_3 = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{sx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{s^2x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{n!}{s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{s^{n+2}x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{s^{n+3}x^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots\right)$$
$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{n!}{s^{n+1}}\left(e^{sx} - 1 - sx - \frac{s^2x^2}{2!} - \cdots - \frac{s^nx^n}{n!}\right)$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{L}[x^n] = e^{-sx}.\frac{n!}{s^{n+1}}\left(e^{sx} - 1 - sx - \frac{s^2x^2}{2!} - \cdots - \frac{s^nx^n}{n!}\right)\Big|_0^\infty$$

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\left(1 - e^{-sx} - e^{-sx}sx - e^{-sx}\frac{s^2x^2}{2!} - \cdots - e^{-sx}\frac{s^nx^n}{n!}\right)\Big|_0^\infty = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\ , (s > 0) \tag{3.11}$$

elde edilir.

Aynı zamanda (2.11), (3.6) ve (3.9) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x e^{s(x-t)}t^n\, dt$$

$$y_1 = \left(-\frac{n!\,t^n e^{s(x-t)}}{n!\,s} - \frac{n!\,t^{n-1}e^{s(x-t)}}{(n-1)!\,s^2} - \frac{n!\,t^{n-2}e^{s(x-t)}}{(n-2)!\,s^3} - \cdots - \frac{n!\,e^{s(x-t)}}{s^{n+1}}\right)\Big|_0^x$$

$$y_1 = -\frac{n!\,x^n}{n!\,s} - \frac{n!\,x^{n-1}}{(n-1)!\,s^2} - \frac{n!\,x^{n-2}}{(n-2)!\,s^3} - \cdots - \frac{n!\,x^0}{s^{n+1}} + \frac{n!\,e^{sx}}{s^{n+1}}$$

$$y_1 = \frac{n!}{s^{n+1}}\left(e^{sx} - 1 - sx - \frac{s^2x^2}{2!} - \cdots - \frac{s^nx^n}{n!}\right)$$

$$y_2 = \frac{n!}{s^{n+1}}\left(e^{sx} - 1 - sx - \frac{s^2x^2}{2!} - \cdots - \frac{s^nx^n}{n!}\right)$$

Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (3.11) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 3.4:</u> (3.2) denkleminde $q(x) = e^{ax}$ için Laplace dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \frac{e^{ax} - 1}{a}$$

$$y_2 = \frac{e^{ax} - 1}{a}\left(1 + \frac{s}{a}\right) - \frac{sx}{a}$$

$$y_3 = \frac{e^{ax} - 1}{a}\left(1 + \frac{s}{a} + \frac{s^2}{a^2}\right) - \frac{sx}{a} - \frac{s^2x}{a^2} - \frac{s^2x^2}{2!.\,a}$$

$$y_4 = \frac{e^{ax}-1}{a}\left(1+\frac{s}{a}+\frac{s^2}{a^2}+\frac{s^3}{a^3}\right)-\frac{sx}{a}-\frac{s^2x}{a^2}-\frac{s^2x^2}{2!.\,a}-\frac{s^3x}{a^3}-\frac{s^3x^3}{3!\,a}-\frac{s^3x^2}{2!\,a^2}$$

$$y_5 = \frac{e^{ax}-1}{a}\left(1+\frac{s}{a}+\frac{s^2}{a^2}+\frac{s^3}{a^3}+\frac{s^4}{a^4}\right)-\frac{sx}{a}-\frac{s^2x}{a^2}-\frac{s^3x}{a^3}-\frac{s^4x}{a^4}-\frac{s^2x^2}{2!\,a}-\frac{s^3x^2}{2!\,a^2}$$
$$-\frac{s^4x^2}{2!\,a^3}-\frac{s^3x^3}{3!\,a}-\frac{s^4x^3}{3!.\,a^2}-\frac{s^4x^4}{4!\,a}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y_n = \frac{e^{ax}-1}{a-s}-\frac{sx}{a-s}-\frac{s^2x^2}{2!\,(a-s)}-\frac{s^3x^3}{3!\,(a-s)}-\cdots-\frac{s^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!\,(a-s)}$$

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{e^{ax}-1}{a-s}-\frac{1}{a-s}(e^{sx}-1)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = e^{-sx}.\frac{e^{ax}-e^{sx}}{a-s}\bigg|_0^\infty = \frac{e^{(a-s)x}-1}{a-s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \qquad (s>a) \qquad (3.12)$$

Aynı zamanda (2.11), (3.6) ve (3.9) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \frac{e^{ax}-e^{sx}}{a-s}$$
$$y_2 = \frac{e^{ax}-e^{sx}}{a-s}$$

Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (3.12) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 3.5:</u> (3.2) denkleminde $q(x) = cosax$ için Laplace dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla

$$y_1 = \frac{sinax}{a}$$
$$y_2 = \frac{sinax}{a}-\frac{scosax}{a^2}+\frac{s}{a^2}$$
$$y_3 = \frac{sinax}{a}-\frac{scosax}{a^2}+\frac{s}{a^2}-\frac{s^2sinax}{a^3}+\frac{s^2x}{a^2}$$

$$y_4 = \frac{sinax}{a} - \frac{scosax}{a^2} + \frac{s}{a^2} - \frac{s^2 sinax}{a^3} + \frac{s^2 x}{a^2} + \frac{s^3 cosax}{a^4} + \frac{s^3 x^2}{a^2.2!} - \frac{s^3}{a^4}$$

$$y_5 = \frac{sinax}{a} - \frac{scosax}{a^2} + \frac{s}{a^2} - \frac{s^2 sinax}{a^3} + \frac{s^2 x}{a^2} + \frac{s^3 cosax}{a^4} + \frac{s^3 x^2}{a^2.2!} - \frac{s^3}{a^4} + \frac{s^4 sinax}{a^5} + \frac{s^4 x^3}{a^2.3!} - \frac{s^4}{a^4} x$$

$$y_6 = \frac{sinax}{a} - \frac{scosax}{a^2} + \frac{s}{a^2} - \frac{s^2 sinax}{a^3} + \frac{s^2 x}{a^2} + \frac{s^3 cosax}{a^4} + \frac{s^3 x^2}{a^2.2!} - \frac{s^3}{a^4} + \frac{s^4 sinax}{a^5} + \frac{s^4 x^3}{a^2.3!} - \frac{s^4}{a^4} x - \frac{s^5 cosax}{a^6} + \frac{s^5 x^4}{a^2.4!} - \frac{s^5 x^2}{a^4.2!} + \frac{s^5}{a^6}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y_n = \frac{sinax}{a}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) - \frac{scosax}{a^2}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) + \frac{s}{a^2}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) + (e^{sx}-1)\frac{s}{a^2}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right)$$

$$\mathcal{L}[cosax] = e^{-sx}.\left\{\frac{sinax}{a}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) - \frac{scosax}{a^2}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) + e^{sx}\left(\frac{s}{a^2+s^2}\right)\right\}\Bigg|_0^\infty$$

$$\mathcal{L}[cosax] = \frac{s}{a^2+s^2} \tag{3.13}$$

Aynı zamanda (2.11), (3.6) ve (3.9) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x e^{s(x-t)} cosat\, dt$$

elde edilir.

$\int udv = uv - \int vdu$ kısmi integrasyonunu $u = cosat, dv = e^{s(x-t)}dt$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{cosat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s}\right\}\Big|_0^x - a\int_0^x \frac{e^{s(x-t)}}{s} sinat\, dt$$

Şimdi de $\int udv = uv - \int vdu$ kısmi integrasyonunu $u = sinat,\ dv = \frac{e^{s(x-t)}}{s}dt$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{cosat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s}\right\}\Big|_0^x + a\left\{sinat.\frac{e^{s(x-t)}}{s^2}\right\}\Big|_0^x - a^2\int_0^x \frac{e^{s(x-t)}}{s^2} cosat\, dt$$

$$y_1\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = \left\{cosat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s}\right\}\Big|_0^x + a\left\{sinat.\frac{e^{s(x-t)}}{s^2}\right\}\Big|_0^x$$

$$y_1\left(\frac{s^2 + a^2}{s^2}\right) = -\frac{cosax}{s} + \frac{asinax}{s^2} + \frac{e^{sx}}{s}$$

$$y_1 = -cosax\left(\frac{s}{a^2 + s^2}\right) + sinax\left(\frac{a}{a^2 + s^2}\right) + e^{sx}\left(\frac{s}{a^2 + s^2}\right)$$

$$y_2 = -cosax\left(\frac{s}{a^2 + s^2}\right) + sinax\left(\frac{a}{a^2 + s^2}\right) + e^{sx}\left(\frac{s}{a^2 + s^2}\right)$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (3.13) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 3.6:</u> (3.2) denkleminde $q(x) = sinax$ için Laplace dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{a} - \frac{cosax}{a}$$

$$y_2 = \frac{1}{a} - \frac{cosax}{a} + \frac{sx}{a} - \frac{ssinax}{a^2}$$

$$y_3 = \frac{1}{a} - \frac{cosax}{a} + \frac{sx}{a} - \frac{ssinax}{a^2} + \frac{s^2x^2}{a.2!} + \frac{s^2cosax}{a^3} - \frac{s^2}{a^3}$$

$$y_4 = \frac{1}{a} - \frac{cosax}{a} + \frac{sx}{a} - \frac{ssinax}{a^2} + \frac{s^2x^2}{a.2!} + \frac{s^2cosax}{a^3} - \frac{s^2}{a^3} + \frac{s^3x^3}{a.3!} + \frac{s^3sinax}{a^4} - \frac{s^3x}{a^3}$$

$$y_5 = \frac{1}{a} - \frac{cosax}{a} + \frac{sx}{a} - \frac{ssinax}{a^2} + \frac{s^2x^2}{a.2!} + \frac{s^2cosax}{a^3} - \frac{s^2}{a^3} + \frac{s^3x^3}{a.3!} + \frac{s^3sinax}{a^4} - \frac{s^3x}{a^3}$$
$$+ \frac{s^5x^4}{a.4!} - \frac{s^4cosax}{a^5} - \frac{s^4x^2}{a^3.2!} + \frac{s^4}{a^5}$$

$$y_6 = \frac{1}{a} - \frac{cosax}{a} + \frac{sx}{a} - \frac{ssinax}{a^2} + \frac{s^2x^2}{a.2!} + \frac{s^2cosax}{a^3} - \frac{s^2}{a^3} + \frac{s^3x^3}{a.3!} + \frac{s^3sinax}{a^4} - \frac{s^3x}{a^3} + \frac{s^5x^4}{a.4!} - \frac{s^4cosax}{a^5} - \frac{s^4x^2}{a^3.2!} + \frac{s^4}{a^5} + \frac{s^6x^5}{a.5!} - \frac{s^5sinax}{a^6} - \frac{s^5x^3}{a^3.3!} + \frac{s^5}{a^5}x$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y_n = -\frac{cosax}{a}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) - \frac{ssinax}{a^2}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) + (e^{sx}-1)\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right)$$

$$\mathcal{L}[sinax] = e^{-sx}.\left\{-\frac{cosax}{a}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) - \frac{ssinax}{a^2}\left(\frac{a^2}{a^2+s^2}\right) + e^{sx}\left(\frac{a}{a^2+s^2}\right)\right\}\Bigg|_0^\infty$$

$$\mathcal{L}[sinax] = \frac{a}{a^2+s^2} \qquad (3.14)$$

Aynı zamanda (2.11), (3.6) ve (3.9) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x e^{s(x-t)} sinat\, dt$$

elde edilir.

$\int udv = uv - \int vdu$ kısmi integrasyonunu $u = sinat,\ dv = e^{s(x-t)}dt$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{sinat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s}\right\}\Bigg|_0^x + a\int_0^x \frac{e^{s(x-t)}}{s} cosat\, dt$$

Şimdi de $\int udv = uv - \int vdu$ kısmi integrasyonunu $u = cosat,\ dv = \frac{e^{s(x-t)}}{s}\ dt$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{sinat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s}\right\}\Big|_0^x + a\left\{cosat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s^2}\right\}\Big|_0^x - a^2\int_0^x \frac{e^{s(x-t)}}{s^2} sinat\, dt$$

$$y_1\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right) = \left\{sinat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s}\right\}\Big|_0^x + a\left\{cosat.\frac{e^{s(x-t)}}{-s^2}\right\}\Big|_0^x$$

$$y_1\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right) = -\frac{sinax}{s} - \frac{acosax}{s^2} + \frac{ae^{sx}}{s^2}$$

$$y_1 = -sinax\left(\frac{s}{a^2+s^2}\right) - cosax\left(\frac{a}{a^2+s^2}\right) + e^{sx}\left(\frac{a}{a^2+s^2}\right)$$

$$y_2 = -sinax\left(\frac{s}{a^2+s^2}\right) - cosax\left(\frac{a}{a^2+s^2}\right) + e^{sx}\left(\frac{a}{a^2+s^2}\right)$$

Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (3.14) çözümüne ulaşılır.

BÖLÜM 4

SUMUDU VE ELZAKİ DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİNİN VİM İLE BULUNUŞU

Sumudu ve Elzaki dönüşüm formülleri de diferansiyel denklemlerin çözümünde önemlidir. Bunun için kullanılacak dönüşüm formüllerine ulaşılmalıdır. Önemli Elzaki dönüşüm formüllerine birçok yol ile ulaşılabilir.

Genel olarak Elzaki dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır[20].

$$E[f(x)] = u\int_0^\infty f(x).e^{-\frac{x}{u}}\,dx \tag{4.1}$$

Sumudu dönüşümü ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır[21].

$$S[f(x)] = \frac{1}{u}\int_0^\infty f(x).e^{-\frac{x}{u}}\,dx \tag{4.2}$$

(4.1) ve (4.2) eşitliklerinden de görüldüğü gibi Sumudu dönüşümü, Elzaki dönüşümünün katı olduğundan Elzaki dönüşüm formülü bulunduğunda kolayca Sumudu dönüşüm formülüne ulaşılabilir. Aşağıda Elzaki dönüşüm formüllerinin VİM ile bulunuşu bulunmaktadır[19].

$f(x)$	$E[f(x)]$	$S[f(x)]$
1	u^2	1
x	u^3	u
x^n	$n!\,u^{n+2}$	$n!\,u^n$
e^{ax}	$\dfrac{u^2}{1-ua}$	$\dfrac{1}{1-ua}$
$cosax$	$\dfrac{u^2}{1+u^2a^2}$	$\dfrac{1}{1+u^2a^2}$
$sinax$	$\dfrac{au^3}{1+a^2u^2}$	$\dfrac{au}{1+a^2u^2}$

Çizelge 3.1. Elzaki ve Sumudu dönüşüm formülleri

$$\begin{aligned} &y' - \frac{y}{u} = uq(x) \\ &\quad y(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

başlangıç şartı ile verilen denklemi inceleyelim. Burada VİM kullanılırken yararlanılan ilk yaklaşım fonksiyonu $y_0(x) = 0$ olur. Denklem çözümü için integral çarpanı uygulanırsa

$$\left(y.e^{-\frac{x}{u}}\right)' = u.q(x).e^{-\frac{x}{u}} \tag{4.4}$$

$$y.e^{-\frac{x}{u}}\Big|_0^\infty = u.\int_0^\infty q(x).e^{-\frac{x}{u}}\,dx \tag{4.5}$$

durumu elde edilir. (4.5) denkleminin sağ tarafı (4.1) eşitliğindeki $E[q(x)]$ değerine eşit olduğundan

$$E[q(x)] = y.e^{-\frac{x}{u}}\Big|_0^\infty \tag{4.6}$$

elde edilir. Demek ki diferansiyel denklemin çözümü olan y değerine yukarıdaki işlem uygulanırsa Elzaki dönüşüm formülü olan $E[q(x)]$ değerine ulaşılmaktadır.

Örnek 4.1: (4.3) denkleminde $q(x) = 1$ için Elzaki dönüşüm formülüne ulaşalım.

$$y_0 = 0 \tag{4.7}$$

başlangıç değeri ile aşağıdaki iterasyon kullanılır. (4.3) denklemi (2.7) formunda olduğundan Lagrange çarpanını (-1) alabiliriz.

$$y_{n+1} = y_n - \int_0^x \left\{ y_n'(t) - \frac{1}{u} y_n(t) - uq(t) \right\} dt \tag{4.8}$$

Buradaki (4.8) iterasyonu yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = ux$$
$$y_2 = ux + \frac{x^2}{2}$$
$$y_3 = ux + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6u}$$
$$y_4 = ux + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6u} + \frac{x^4}{24u^2}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) u^2$$

bulunur. Buradan

$$E[1] = e^{-\frac{x}{u}} . \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) u^2 \Big|_0^\infty = \left(1 - e^{-\frac{x}{u}}\right) u^2 \Big|_0^\infty = u^2 \tag{4.9}$$

bulunur.

Aynı zamanda (4.3) denklemi (2.11) formunda olduğu için Lagrange çarpanını

$\lambda(x,t) = -e^{-\frac{1}{u}(t-x)} = -e^{\frac{x-t}{u}}$ alabiliriz. Bu durumda

$$y_{n+1} = y_n - \int_0^x e^{\frac{x-t}{u}} \left\{ y_n{}'(t) - \frac{1}{u} y_n(t) - uq(t) \right\} dt \tag{4.10}$$

iterasyonu kullanılmalıdır. Buradan

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) u^2$$
$$y_2 = \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) u^2$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (4.10) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 4.2:</u> (4.3) denkleminde $q(x) = x$ için Elzaki dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \frac{ux^2}{2}$$
$$y_2 = \frac{ux^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
$$y_3 = \frac{ux^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{t^4}{24u}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n = u^3 \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) - xu^2$$

bulunur. Buradan

$$E[x] = e^{-\frac{x}{u}}.\left[u^3 \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) - xu^2\right] \Big|_0^\infty = \left\{u^3 \left(1 - e^{-\frac{x}{u}}\right) - e^{-\frac{x}{u}}.xu^2\right\} \Big|_0^\infty = u^3 \tag{4.11}$$

elde edilir.

Aynı zamanda (2.11), (4.7) ve (4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = u^3\left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) - xu^2$$
$$y_2 = u^3\left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right) - xu^2$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (4.11) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 4.3:</u> (4.3) denkleminde $q(x) = x^n$ için Elzaki dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = u\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$y_2 = u\ \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
$$y_3 = u\ \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{u(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = n!\,u^{n+2}\left(\frac{x^{n+1}}{u^{n+1}(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{u^{n+2}(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{u^{n+3}(n+3)!} + \cdots\right)$$
$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = n!\,u^{n+2}\left(e^{\frac{x}{u}} - 1 - \frac{x}{u} - \frac{x^2}{2!\,u^2} - \cdots - \frac{x^n}{n!\,u^n}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$E[x^n] = e^{-\frac{x}{u}}.n!\,u^{n+2}\left(e^{-\frac{x}{u}} - 1 - \frac{x}{u} - \frac{x^2}{2!\,u^2} - \cdots - \frac{x^n}{n!\,u^n}\right)\Big|_0^\infty$$

$$E[x^n] = n!\,u^{n+2}\left(1 - e^{-\frac{x}{u}} - e^{-\frac{x}{u}}\frac{x}{u} - e^{-\frac{x}{u}}\frac{x^2}{2!\,u^2} - \cdots - e^{-\frac{x}{u}}\frac{x^n}{n!\,u^n}\right)\Bigg|_0^{\infty}$$

$$E[x^n] = n!\,u^{n+2} \tag{4.12}$$

elde edilir.

Aynı zamanda (2.11), (4.7) ve (4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x e^{\frac{x-t}{u}} u.\,t^n\,dt$$

$$y_1 = \left(-\frac{n!\,t^n u^2 e^{\frac{x-t}{u}}}{n!} - \frac{n!\,t^{n-1}u^3 e^{\frac{x-t}{u}}}{(n-1)!} - \frac{n!\,t^{n-2}u^4 e^{\frac{x-t}{u}}}{(n-2)!} - \cdots - \frac{n!\,u^{n+2}e^{\frac{x-t}{u}}}{0!}\right)\Bigg|_0^x$$

$$y_1 = -\frac{n!\,x^n u^2}{n!} - \frac{n!\,x^{n-1}u^3}{(n-1)!} - \frac{n!\,x^{n-2}u^4}{(n-2)!} - \cdots - \frac{n!\,u^{n+2}}{0!} + n!\,u^{n+2}e^{\frac{x}{u}}$$

$$y_1 = n!\,u^{n+2}\left(e^{\frac{x}{u}} - 1 - \frac{x}{u} - \frac{x^2}{2!\,u^2} - \cdots - \frac{x^n}{n!\,u^n}\right)$$

$$y_2 = n!\,u^{n+2}\left(e^{\frac{x}{u}} - 1 - \frac{x}{u} - \frac{x^2}{2!\,u^2} - \cdots - \frac{x^n}{n!\,u^n}\right)$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (4.12) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 4.4:</u> (4.3) denkleminde $q(x) = e^{ax}$ için Elzaki dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = (e^{ax} - 1)\ \frac{u}{a}$$

$$y_2 = (e^{ax} - 1)\ \left(\frac{u}{a} + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{x}{a}$$

$$y_3 = (e^{ax} - 1)\ \left(\frac{u}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ua^3}\right) - \frac{x}{a} - \frac{x}{ua^2} - \frac{x^2}{2au}$$

$$y_4 = (e^{ax} - 1)\left(\frac{u}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ua^3} + \frac{1}{u^2a^4}\right) - \frac{x}{a} - \frac{x}{ua^2} - \frac{x^2}{2au} - \frac{x}{u^2a^3} - \frac{x^2}{2u^2a^2} - \frac{x^3}{6au^2}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y_n = (e^{ax} - 1)\left(\frac{u}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ua^3} + \frac{1}{u^2a^4} + \cdots\right) - \left(\frac{x}{a} + \frac{x}{ua^2} + \frac{x}{u^2a^3} + \cdots\right) - \left(\frac{x^2}{2au} + \frac{x^2}{2u^2a^2} + \cdots\right) - \left(\frac{x^3}{6au^2} + \cdots\right) - \cdots$$

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{u^2}{ua-1}\left(e^{ax} - e^{\frac{x}{u}}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$E[e^{ax}] = e^{-\frac{x}{u}}.\frac{u^2}{ua-1}\left(e^{ax} - e^{\frac{x}{u}}\right)\Big|_0^\infty = \frac{u^2}{ua-1}\left(e^{x\left(a-\frac{1}{u}\right)} - 1\right)\Big|_0^\infty$$

$$E[e^{ax}] = \frac{u^2}{1-ua} \qquad \left(a < \frac{1}{u}\right) \tag{4.13}$$

elde edilir.

Aynı zamanda (2.11), (4.7) ve (4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \frac{u^2}{ua-1}\left(e^{ax} - e^{\frac{x}{u}}\right)$$

$$y_2 = \frac{u^2}{ua-1}\left(e^{ax} - e^{\frac{x}{u}}\right)$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (4.13) çözümüne ulaşılır.

Örnek 4.5: (4.3) denkleminde $q(x) = cosax$ için Elzaki dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri yardımıyla

$y_0 = 0$

$y_1 = u\frac{sinax}{a}$

$y_2 = u\frac{sinax}{a} - \frac{cosax}{a^2} + \frac{1}{a^2}$

$y_3 = u\frac{sinax}{a} - \frac{cosax}{a^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{sinax}{ua^3} + \frac{x}{ua^2}$

$y_4 = u\frac{sinax}{a} - \frac{cosax}{a^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{sinax}{ua^3} + \frac{x}{ua^2} + \frac{cosax}{u^2a^4} + \frac{x^2}{u^2a^2.2!} - \frac{1}{u^2a^4}$

$$y_5 = u\frac{sinax}{a} - \frac{cosax}{a^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{sinax}{ua^3} + \frac{x}{ua^2} + \frac{cosax}{u^2a^4} + \frac{x^2}{u^2a^2.2!} - \frac{1}{u^2a^4} + \frac{sinax}{u^3a^5} + \frac{x^3}{u^3a^2.3!} - \frac{x}{u^3a^4}$$

$$y_6 = u\frac{sinax}{a} - \frac{cosax}{a^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{sinax}{ua^3} + \frac{x}{ua^2} + \frac{cosax}{u^2a^4} + \frac{x^2}{u^2a^2.2!} - \frac{1}{u^2a^4} + \frac{sinax}{u^3a^5} + \frac{x^3}{u^3a^2.3!} - \frac{x}{u^3a^4} - \frac{cosax}{u^4a^6} + \frac{x^4}{u^4a^2.4!} - \frac{x^2}{u^4a^4.2!} + \frac{1}{u^4a^6}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y_n = \frac{sinax}{a}\left(\frac{u^3a^2}{1+u^2a^2}\right) - \frac{cosax}{a^2}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right) + \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right)\frac{1}{a^2}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$E[cosax] = e^{-\frac{x}{u}}.\left\{\frac{sinax}{a}\left(\frac{u^3a^2}{1+u^2a^2}\right) - \frac{cosax}{a^2}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right) + e^{\frac{x}{u}}\frac{1}{a^2}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right)\right\}\Bigg|_0^\infty$$

$$E[cosax] = \frac{u^2}{1+u^2a^2} \tag{4.14}$$

bulunur.

Aynı zamanda (2.11), (4.7) ve (4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x u.e^{\frac{x-t}{u}}.cosat\,dt$$

elde edilir.

$\int UdV = UV - \int VdU$ kısmi integrasyonunu $U = cosat, dV = u.e^{\frac{x-t}{u}}$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{cosat.-u^2.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x - \int_0^x u^2.e^{\frac{x-t}{u}}a.sinat\,dt$$

bulunur.

Burada $\int UdV = UV - \int VdU$ kısmi integrasyonunu $U = asinat, dV = u^2.e^{\frac{x-t}{u}}dt$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{cosat.-u^2.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x + \left\{asinat.u^3.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x - \int_0^x u^3.e^{\frac{x-t}{u}}a^2cosat\,dt$$

$$y_1(1 + u^2a^2) = \left\{cosat.-u^2.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x + \left\{asinat.u^3.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x$$

$$y_1(1 + u^2a^2) = -cosax.u^2 + u^2e^{\frac{x}{u}} + asinax.u^3$$

$$y_1 = -cosax\left(\frac{u^2}{1 + a^2u^2}\right) + asinax\left(\frac{u^3}{1 + a^2u^2}\right) + e^{\frac{x}{u}}\left(\frac{u^2}{1 + a^2u^2}\right)$$

$$y_2 = -cosax\left(\frac{u^2}{1 + a^2u^2}\right) + asinax\left(\frac{u^3}{1 + a^2u^2}\right) + e^{\frac{x}{u}}\left(\frac{u^2}{1 + a^2u^2}\right)$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (4.14) çözümüne ulaşılır.

<u>Örnek 4.6:</u> (4.3) denkleminde $q(x) = sinax$ için Elzaki dönüşüm formülüne ulaşalım. (2.7), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \frac{u}{a} - \frac{ucosax}{a}$$
$$y_2 = \frac{u}{a} - \frac{ucosax}{a} + \frac{x}{a} - \frac{sinax}{a^2}$$
$$y_3 = \frac{u}{a} - \frac{ucosax}{a} + \frac{x}{a} - \frac{sinax}{a^2} + \frac{x^2}{ua.2!} + \frac{cosax}{ua^3} - \frac{1}{ua^3}$$
$$y_4 = \frac{u}{a} - \frac{ucosax}{a} + \frac{x}{a} - \frac{sinax}{a^2} + \frac{x^2}{ua.2!} + \frac{cosax}{ua^3} - \frac{1}{ua^3} + \frac{x^3}{u^2a.3!} + \frac{sinax}{u^2a^4} - \frac{x}{u^2a^3}$$
$$y_5 = \frac{u}{a} - \frac{ucosax}{a} + \frac{x}{a} - \frac{sinax}{a^2} + \frac{x^2}{ua.2!} + \frac{cosax}{ua^3} - \frac{1}{ua^3} + \frac{x^3}{u^2a.3!} + \frac{sinax}{u^2a^4} - \frac{x}{u^2a^3}$$
$$+ \frac{x^4}{u^3a.4!} - \frac{cosax}{u^3a^5} - \frac{x^2}{u^3a^3.2!} + \frac{1}{u^3a^5}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$y_n = -\frac{cosax}{a}\left(\frac{u^3a^2}{1+u^2a^2}\right) - \frac{sinax}{a^2}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right) + \frac{u}{a}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right)$$
$$+ \left(e^{\frac{x}{u}} - 1\right)\frac{u}{a}\left(\frac{u^2a^2}{1+u^2a^2}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$E[sinax] = e^{-\frac{x}{u}}.\left\{-sinax\left(\frac{u^2}{1+a^2u^2}\right) - cosax\left(\frac{au^3}{1+a^2u^2}\right) + e^{\frac{x}{u}}\left(\frac{au^3}{1+a^2u^2}\right)\right\}\Bigg|_0^\infty$$
$$E[sinax] = \frac{au^3}{1+a^2u^2} \tag{4.15}$$

sonucuna ulaşılır.

Aynı zamanda (2.11), (4.7) ve (4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = \int_0^x u.e^{\frac{x-t}{u}}.sinat\,dt$$

elde edilir.

$\int UdV = UV - \int VdU$ kısmi integrasyonunu $U = sinat,\ dV = u.e^{\frac{x-t}{u}}dt$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{sinat. -u^2.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x + \int_0^x u^2.e^{\frac{x-t}{u}}a.cosat\,dt$$

Burada $\int UdV = UV - \int VdU$ kısmi integrasyonunu $U = acosat,\ dV = u^2.e^{\frac{x-t}{u}}dt$ için uygulayalım.

$$y_1 = \left\{sinat. -u^2.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x + \left\{acosat. -u^3.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x - \int_0^x u^3.e^{\frac{x-t}{u}}a^2sinat\,dt$$

$$y_1(1 + a^2u^2) = \left\{sinat. -u^2.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x + \left\{acosat. -u^3.e^{\frac{x-t}{u}}\right\}\Big|_0^x$$

$$y_1(1 + a^2u^2) = -sinax.u^2 - acosax.u^3 + au^3e^{\frac{x}{u}}$$

$$y_1 = -sinax\left(\frac{u^2}{1 + a^2u^2}\right) - cosax\left(\frac{au^3}{1 + a^2u^2}\right) + e^{\frac{x}{u}}\left(\frac{au^3}{1 + a^2u^2}\right)$$

$$y_2 = -sinax\left(\frac{u^2}{1 + a^2u^2}\right) - cosax\left(\frac{au^3}{1 + a^2u^2}\right) + e^{\frac{x}{u}}\left(\frac{au^3}{1 + a^2u^2}\right)$$

elde edilir. Burada y çözümü bulunmuş olur. Bu sayede (4.15) çözümüne ulaşılır.

BÖLÜM 5

KOMPLEKS DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN VİM İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

w bir kompleks sayı, A, B ve C gerçek sayılar olmak üzere

$$A\frac{\partial w}{\partial z}+B\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+Cw=F(z,\bar{z}) \tag{5.1}$$

formundaki kompleks diferansiyel denklemi inceleyelim. Kompleks sayılar teorisi gereği

$$A\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right)+B\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)+Cw=G(x,y) \tag{5.2}$$

elde edilir. (5.2) denklemi düzenlenirse

$$(A+B)\frac{\partial w}{\partial x}+i(B-A)\frac{\partial w}{\partial y}+2Cw=2G(x,y) \tag{5.3}$$

denklemi elde edilir. (5.3) denklemine $w(x,0)$ başlangıç şartı ile verilirse

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{A+B}{i(B-A)}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{2C}{i(B-A)}w=\frac{2G(x,y)}{i(B-A)} \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) denkleminde $\frac{\partial w}{\partial y}$ haricindeki terimlere kısıtlanmış varyasyon uygulanırsa (2.7) formunda olacağından $\lambda(t,y)=-1$ olur ve

$$w_{n+1}(x,y) = w_n(x,y) - \int_0^y \left\{ \frac{\partial w_n(x,t)}{\partial t} + \frac{A+B}{i(B-A)} \frac{\partial w_n(x,t)}{\partial x} + \frac{2C}{i(B-A)} w_n(x,t) - \frac{2G(x,t)}{i(B-A)} \right\} dt \tag{5.5}$$

denklemi ile VİM kullanılarak yaklaşık veya tam çözüme ulaşabiliriz.

(5.3) denklemi $w(0,y)$ başlangıç şartı ile verilirse

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{i(B-A)}{A+B} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{2C}{A+B} w = \frac{2G(x,y)}{A+B} \tag{5.6}$$

denklemi elde edilir. (5.6) denkleminde $\frac{\partial w}{\partial x}$ haricindeki terimlere kısıtlanmış varyasyon uygulanırsa (2.7) formunda olacağından $\lambda(x,t) = -1$ olur ve

$$w_{n+1}(x,y) = w_n(x,y) - \int_0^x \left\{ \frac{\partial w_n(t,y)}{\partial t} + \frac{i(B-A)}{A+B} \frac{\partial w_n(t,y)}{\partial y} + \frac{2C}{A+B} w_n(t,y) - \frac{2G(t,y)}{A+B} \right\} dt \tag{5.7}$$

denklemi ile VİM kullanılarak yaklaşık veya tam çözüme ulaşabiliriz.

Örnek 5.1: $\frac{\partial w}{\partial z} + 2\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 3z^2 + 2$ kompleks diferansiyel denklemi $w(x,y)$ olmak üzere başlangıç şartı $w(x,0) = x^3 + x$ verilsin. (5.2) durumu uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 3x^2 - 3y^2 + 2 + 6ixy$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial w}{\partial y} - 3\mathrm{i}\frac{\partial w}{\partial x} = -6\mathrm{i}x^2 + 6\mathrm{i}y^2 - 4i + 12xy$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.7) formunda olduğu için (5.5) iterasyonu kullanılır. Bu iterasyon

$$w_{n+1}(x,y) = w_n(x,y) - \int_0^y \left\{\frac{\partial w_n(x,t)}{\partial t} - 3\mathrm{i}\frac{\partial w_n(x,t)}{\partial x} - 12xt + i(6x^2 - 6t^2 + 4)\right\} dt$$

şeklindedir. İlk yaklaşım fonksiyonu $w_0(x,y) = x^3 + x$ olur.

$$w_1(x,y) = x^3 + x - \int_0^y (-9\mathrm{i}x^2 - 3i + 6ix^2 - 6it^2 + 4i - 12xt)dt$$

$$w_1(x,y) = x^3 + x + 6xy^2 + i(3x^2y - y + 2y^3)$$

$$w_2(x,y) = x^3 + x + 6xy^2 + i(3x^2y - y + 2y^3) - \int_0^y (18xt - 18it^2)dt$$

$$w_2(x,y) = x^3 + x - 3xy^2 + i(3x^2y - y + 8y^3)$$

$$w_3(x,y) = x^3 + x - 3xy^2 + i(3x^2y - y + 8y^3) - \int_0^y 27it^2dt$$

$$w_3(x,y) = x^3 + x - 3xy^2 + i(3x^2y - y - y^3)$$

$$w_4(x,y) = x^3 + x - 3xy^2 + i(3x^2y - y - y^3)$$

Sonuç olarak

$$w(x,y) = x^3 + x - 3xy^2 + i(3x^2y - y - y^3) = z^3 + \bar{z}$$

elde edilir.

Örnek 5.2: $\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - w = 0$ kompleks diferansiyel denklemi $w(x,y)$ olmak üzere başlangıç şartı $w(x,0) = e^{3x}$ verilsin. (5.2) durumu uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)-w=0$$

eşitliğinde düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\partial w}{\partial y}-iw=0$$

elde edilir. Bu denklem (2.11) formunda olduğu için

$$\lambda(t,y)=-e^{i(y-t)}$$

kullanılır. İlk yaklaşım fonksiyonu $w_0(x,y)=e^{3x}$ olur.

$$w_1(x,y)=e^{3x}-\int_0^y e^{i(y-t)}(-ie^{3x})dt=e^{3x+iy}$$

$$w_2(x,y)=e^{3x+iy}-\int_0^y e^{i(y-t)}\left(ie^{3x+it}-ie^{3x+it}\right)dt=e^{3x+iy}$$

Sonuç olarak $w(x,y)=e^{3x+iy}=e^{2z+\bar{z}}$ elde edilir.

Örnek 5.3: $2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=4z+1$ kompleks diferansiyel denklemi $w(x,y)$ olmak üzere başlangıç şartı $w(x,0)=x^2+5x$ verilsin. (5.2) durumu uygulanırsa

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)=4x+1+4yi$$

eşitliğinde düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{i}{3}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{2i}{3}(4x+1+4yi)=0$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.7) formunda olduğu için (5.5) iterasyonu kullanılır. Bu iterasyon

$$w_{n+1}(x,y) = w_n(x,y) - \int_0^y \left\{ \frac{\partial w_n(x,t)}{\partial t} + \frac{i}{3}\frac{\partial w_n(x,t)}{\partial x} - \frac{2i}{3}(4x+1+4yi) \right\} dt$$

şeklindedir. İlk yaklaşım fonksiyonu $w_0(x,y) = x^2 + 5x$ olur.

$$w_1(x,y) = x^2 + 5x - \int_0^y \frac{i}{3}(2x+5) - \frac{2i}{3}(4x+1+4ti)dt$$

$$w_1(x,y) = x^2 + 5x - \frac{4y^2}{3} + \frac{i}{3}(6xy - 3y)$$

$$w_2(x,y) = x^2 + 5x - \frac{4y^2}{3} + \frac{i}{3}(6xy - 3y)$$
$$- \int_0^y \left[\left(-\frac{8t}{3} + 2xi - i \right) + \frac{i}{3}(2x+5+2ti) - \frac{2i}{3}(4x+1+4it) \right] dt$$

$$w_2(x,y) = x^2 + 5x - y^2 + i(2xy - y)$$
$$w_3(x,y) = x^2 + 5x - y^2 + i(2xy - y)$$

Sonuç olarak $w(x,y) = z^2 + 3\bar{z} + 2z$ elde edilir.

BÖLÜM 6

BAZI ÖZEL DENKLEMLERİN VİM İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Matematikte ve diğer temel bilimlerde önemli sonuçları olan birtakım diferansiyel denklemler vardır. Bu tür diferansiyel denklemlerden bazılarının VİM ile de yaklaşık çözümlerine ulaşılabilmektedir. Bu bölümde bu tür denklemlerden bazıları incelenecektir.

6.1. AIRY DENKLEMİ

Airy denklemi çok bilinen bir 2. mertebeden diferansiyel denklemdir. Daha çok fizikte kullanım alanları mevcuttur.

$$y'' - xy = 0 \tag{6.1}$$

formundadır.

(6.1) denklemini $y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$ başlangıç şartları ile çözelim. (6.1) denklemi (2.8) formunda olduğu için $\lambda(x,t) = t - x$ yazılabilir.
$y_0 = c_1 + c_2 x$ ilk yaklaşım fonksiyonu başlangıç şartlarını sağlar.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(x,t)\{y_n''(t) - t y_n(t)\}dt$$

iterasyonu kullanılabilir.

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x$$

$$y_1(x) = c_1 + c_2 x + \int_0^x (t - x)(-t)\,(c_1 + c_2 t)dt$$

$$y_1(x) = c_1\left(1 + \frac{x^3}{6}\right) + c_2\left(x + \frac{x^4}{12}\right)$$

$$y_2(x) = c_1\left(1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6}\right) + c_2\left(x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7}\right)$$

$$y_3(x) = c_1\left(1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9}\right)$$
$$+ c_2\left(x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10}\right)$$

elde edilir.

Bu verilerle genelleme yaparsak

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

olmak üzere

$$f_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(2.3).(5.6)\dots(3k-1)(3k)}$$

$$f_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(3.4).(6.7)\dots(3k)(3k+1)}$$

elde edilir. Böylece Airy denklemi genel çözümüne VİM ile ulaşılmış olur.

6.2. BURGERS' DENKLEMİ

$$u_t + uu_x = cu_{xx} \tag{6.2}$$

formundaki lineer olmayan Burgers' denklemi daha çok fizikte kullanılan bir denklemdir. İlk olarak 1915 yılında Bateman tarafından tanımlanmıştır[22]. Çözüm yöntemleri üzerine daha çok Burgers' in çalışmaları olduğu için Burgers' denklemi olarak bilinir. 2005 yılında Abdou ve Soliman VİM ile Burger's denklemini çözmüşlerdir[3]. Burada c gerçek sayı ve çözüm $u(x,t)$ formundadır. Bu denklem t

değişkenine göre çözülürken (2.7) formunda olduğu için Lagrange çarpanı olarak (-1) değeri kullanabilir.

(6.2) denklemini önce $u(x,0) = -1 - \frac{2c}{x}$ başlangıç değeri için çözelim.

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t) + u_n(x,t) \frac{\partial}{\partial x} u_n(x,t) - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x,t) \right) dt \quad (6.3)$$

iterasyonunu kullanmalıyız.

$$u_0(x,t) = -1 - \frac{2c}{x}$$
$$u_1(x,t) = -1 - \frac{2c}{x} + \frac{2ct}{x^2}$$
$$u_2(x,t) = -1 - \frac{2c}{x} + \frac{2ct}{x^2} - \frac{2ct^2}{x^3}$$
$$u_3(x,t) = -1 - \frac{2c}{x} + \frac{2ct}{x^2} - \frac{2ct^2}{x^3} + \frac{2ct^3}{x^4}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$u(x,t) = -1 - \frac{2c}{x+t}\,, \left|\frac{t}{x}\right| < 1$$

genel çözümü elde edilir.

(6.2) denklemini $u(x,0) = 1 - \frac{2c}{x}$ başlangıç değeri için çözelim. (6.3) iterasyonu kullanılırsa

$$u_0(x,t) = 1 - \frac{2c}{x}$$
$$u_1(x,t) = 1 - \frac{2c}{x} - \frac{2ct}{x^2}$$

$$u_2(x,t) = 1 - \frac{2c}{x} - \frac{2ct}{x^2} - \frac{2ct^2}{x^3}$$
$$u_3(x,t) = 1 - \frac{2c}{x} - \frac{2ct}{x^2} - \frac{2ct^2}{x^3} - \frac{2ct^3}{x^4}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$u(x,t) = 1 - \frac{2c}{x-t}\,, \left|\frac{t}{x}\right| < 1$$

genel çözümü elde edilir.

6.3. KdV DENKLEMİ

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0 \tag{6.4}$$

formundaki lineer olmayan KdV denklemi de daha çok fizikte kullanım alanları olan bir denklemdir. Denklem 1895 yılında Korteweg-de Vries tarafından tanımlanmıştır[23]. 2005 yılında Abdou ve Soliman KdV denklemini VİM ile çözmüşlerdir[4]. Burada c gerçek sayı ve çözüm $u(x,t)$ formundadır. Bu denklem t değişkenine göre çözülürken (2.7) formunda olduğu için Lagrange çarpanı olarak (-1) değeri kullanabilir.

(6.4) denklemini $u(x,0) = -cx$ başlangıç değeri için çözelim.

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) + cu_n(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u_n(x,t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u_n(x,t)\right)dt$$

iterasyonunu kullanmalıyız.

$$u_0(x,t) = -cx$$
$$u_1(x,t) = -cx - c^3xt$$
$$u_2(x,t) = -cx - c^3xt - c^5xt^2 - \frac{c^7xt^3}{3}$$

$$u_3(x,t) = -cx - c^3xt - c^5xt^2 - c^7xt^3 - \cdots$$

Bu şekilde devam edilirse

$$u(x,t) = \frac{-cx}{1 - c^2t}\ , |c^2t| < 1$$

genel çözümü elde edilir.

BÖLÜM 7

SONUÇLAR

1. VİM, birçok lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümünde kullanılabilen etkili bir yöntemdir. Yöntemde Lagrange çarpanının bulunuşunda izlenecek yol ve ilk yaklaşım fonksiyonunun seçimi yöntemin çözüme ulaşma hızını etkiler.

2. Bu yöntem ile Laplace, Elzaki, Sumudu dönüşümü gibi bazı diferansiyel dönüşüm formüllerine kolaylıkla ulaşılabilmektedir.

3. VİM, kompleks diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça etkilidir.

4. VİM; Airy denklemi, Burgers' denklemi, KdV denklemi gibi bilimde önemli bir yere sahip denklemlerin çözümlerinde de kullanılabilir. Ayrıca burada belirtilmeyen birçok önemli denklem için de uygulanabilmektedir.

5. İkinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemler için Lagrange çarpanı belirleme yöntemi bu çalışmada bulunmaktadır. Bu yöntemle bulunan Lagrange çarpanı kullanılarak, bu tür denklemlerin VİM ile tam çözümüne ulaşılabilmektedir. Ancak değişken katsayılı denklemlerde VİM kullanmak zorlaşmaktadır.

6. VİM, üzerinde çalışılarak daha farklı denklem çeşitlerinde de kullanılabilecek düzeyde bir yöntemdir. Ayrıca VİM başka yöntemlerle birleştirilerek farklı tarzlarda da kullanılmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Inokuti, M., Sekine, H. And Mura, T., “General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics”, ***Variational method in the mechanics of solids,*** 33(5): 156-162 (1978).

2. He, J., “A new approach to nonlinear partial differential equations”, ***Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,*** 2(4): 230-235 (1997).

3. Abdou, M. A., Soliman, A. A., “Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations”, ***Journal of computational and Applied Mathematics***, 181(2): 245-251 (2005).

4. Abdou, M. A. And Soliman, A. A., “New applications of variational iteration method”, ***Physica D: Nonlinear Phenomena***, 211(1-2): 1-8 (2005).

5. Bildik, N., And Konuralp, A. “The use of variational iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations”, ***International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,*** *7*(1): 65-70 (2006).

6. Wang, S. Q. And He, J. H., “Variational iteration method for solving integro-differential equations”, ***Physics letters A***, 367(3): 188-191 (2007).

7. Wazwaz, A. M., “A study on linear and nonlinear Schrodinger equations by the variational iteration method”, ***Chaos, Solitons & Fractals***, 37(4): 1136-1142 (2008).

8. Hemeda, A. A., “Variational iteration method for solving wave equation”, ***Computers & Mathematics with Applications***, 56(8): 1948-1953 (2008).

9. Yusufoğlu, E., “The variational iteration method for studying the Klein–Gordon equation”, ***Applied Mathematics Letters***, 21(7): 669-674. (2008).

10. Altıntan, D. And Uğur, Ö. M. Ü. R., “Variational iteration method for Sturm–Liouville differential equations”, ***Computers & Mathematics with Applications***, 58(2): 322-328 (2009)

11. Sakar, M. G., Erdogan, F. And Yıldırım, A., “Variational iteration method for the time-fractional Fornberg–Whitham equation”, ***Computers & Mathematics with Applications***, 63(9): 1382-1388 (2012).

12. He, J. H. And Latifizadeh, H., “A general numerical algorithm for nonlinear differential equations by the variational iteration method”, ***International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow***, 30: 4797-4810 (2020).

13. Gelfand, I. M. And Silverman, R. A., “Calculus of variations”, ***Courier Corporation***, (2000)

14. Elsgolc, L. D. “Calculus of variations”, ***Courier Corporation***, (2012)

15. He, J. H. And Wu, X. H., “Variational iteration method: new development and applications”, ***Computers & Mathematics with Applications***, 54(7-8): 881-894 (2007).

16. İlhan, E., “Diferensiyel denklemlerin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşık analitik çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, ***Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Kırşehir, (2011)

17. İnternet: Reseachgate, “Varyasyonel İterasyon Metodu”, **https://www.researchgate.net/publication/338717410_Varyasyonel_iterasyon_metodu** (2017)

18. Spiegel, M. R., “Laplace transforms”, ***McGraw-Hill***, New York, (1965).

19. Gubes, M., “A new calculation technique for the Laplace and Sumudu transforms by means of the variational iteration method”, ***Mathematical Sciences***, 13(1): 21-25. (2019).

20. Elzaki, T. M., “The new integral transform Elzaki transform” ***Global Journal of pure and applied mathematics***, 7(1): 57-64 (2011).

21. Watugala, G., “Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems”, ***Integrated Education***, 24(1): 35-43 (1993).

22. Bateman, H. “Some recent researches on the motion of fluids”, ***Monthly Weather Review***, 43(4): 163-170 (1915).

23. Miles, J. W., “The Korteweg-de Vries equation: a historical essay”, ***Journal of fluid mechanics***, 106: 131-147 (1981).

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin KAYABAŞI ilkokul ve ortaokulu Safranbolu’da okudu. 1995 yılında Kastamonu Göl Anadolu Öğretmen Lisesinden ve 2000 yılında Gazi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. Evli ve 2 çocuk babasıdır ve halen Karabük Mehmet Vergili Fen Lisesinde çalışmaktadır.