



**GERÇEK ZAMANLI PERİDİNAMİK DİFERANSİYEL  
OPERATÖR YARDIMIYLA OLUŞTURULAN  
HAREKETLİ KÜTLE MODELİNİN TİTREŞİMLERİNİN  
MODELLENMESİ VE ANALİZİ**

**Ahmet Yasir YENİAYDIN**

**2022  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ**

**Tez Danışmanı  
Dr. Öğretim Üyesi Cihan MIZRAK**

**GERÇEK ZAMANLI PERİDİNAMİK DİFERANSİYEL OPERATÖR  
YARDIMIYLA OLUŞTURULAN HAREKETLİ KÜTLE MODELİNİN  
TİTREŞİMLERİNİN MODELLENMESİ VE ANALİZİ**

**Ahmet Yasir YENİAYDIN**

**T.C.  
Karabük Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü  
Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalında  
Yüksek Lisans Tezi  
Olarak Hazırlanmıştır**

**Tez Danışmanı  
Dr. Öğretim Üyesi Cihan MIZRAK**

**KARABÜK  
Ağustos 2022**

Ahmet Yasir YENİAYDIN tarafından hazırlanan "GERÇEK ZAMANLI PERİDİNAMİK DİFERANSİYEL OPERATÖR YARDIMIYLA OLUŞTURULAN HAREKETLİ KÜTLE MODELİNİN TİTREŞİMLERİNİN MODELLENMESİ VE ANALİZİ" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Cihan MIZRAK

.....

Tez Danışmanı, Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir. 31/08/2022

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)

İmzası

Başkan : Doç. Dr. M. Hüseyin ÇETİN (KTÜN)

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ramazan ÖZMEN (KBÜ)

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Cihan MIZRAK (KBÜ)

.....

KBÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Hasan SOLMAZ

.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

*“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”*

Ahmet Yasir YENİAYDIN

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### GERÇEK ZAMANLI PERİDİNAMİK DİFERANSİYEL OPERATÖR YARDIMIYLA OLUŞTURULAN HAREKETLİ KÜTLE MODELİNİN TİTREŞİMLERİNİN MODELLENMESİ VE ANALİZİ

Ahmet Yasir YENİAYDIN

Karabük Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:

Dr Öğretim Üyesi, Cihan MIZRAK

Ağustos 2022, 67 sayfa

Bu çalışmada, tek serbestlik dereceli Araç Köprü Etkileşiminin (AKE) dinamik cevaplarını elde etmek için Peridinamik Diferansiyel Operatör (PDO) ve Sonlu Elemanlar Yönteminin (SEY) yarı analitik çözüm üzerinden karşılaştırılması yapılmıştır. Sonlu elemanlarının uygulanmasında Newmark Beta yöntemi tercih edilmiştir. Aracın dikey doğrultuda yer değiştirme, hız ve ivme cevapları ile köprü orta noktasının dikey yönde yer değiştirme, hız ve ivme cevapları için üç farklı zaman aralığı sırasıyla  $\Delta t_1 = 0.01s$ ,  $\Delta t_2 = 0.001s$  ve  $\Delta t_3 = 0.0001s$  seçilmiştir. Nümerik çözüm ile yarı analitik çözüm arasındaki hatanın tespitinde global hata ölçüm yöntemi uygulanmıştır. Bu hata yöntemine göre aracın düşey doğrultudaki yer değiştirme, hız ve ivme tepkilerinin PDO yöntemine göre  $\Delta t_1 = 0.01s$  için oranları sırası ile %0.623532, %0.085212 ve %0.090064 ile yarı analitik bir çözüme yakınsadığı tespit

edilmiştir. Aynı zaman aralığında SEY'nin sonuç vermediği ortaya çıkmıştır. Benzer şekilde köprünün orta noktasının dikey yöndeki yer değiştirme hız ve ivme cevaplarının PDO yöntemine göre  $\Delta t_1 = 0.01s$  için sırasıyla %0.255793 %0.077149 ve %0.119281 hata oranları bulunurken SEY yine bu zaman aralığında çözüm vermemiştir. Aracın ve köprü orta noktasının  $\Delta t_2 = 0.001s$  ve  $\Delta t_3 = 0.0001s$  için dinamik tepkileri incelendiğinde de, PDO yöntemine göre elde edilen dinamik cevapların SEY göre daha düşük hata oranı ile yarı analitik çözüme yakınsadığı elde edilmiştir. Çalışma ile PDO yönteminin SEY'ne göre daha kısa sürede daha doğru sonuçlar ürettiği ortaya çıkarılmıştır.

**Anahtar Sözcükler** : Araç-köprü etkileşim, sonlu elemanlar yöntemi, peridinamik diferansiyel operatör

**Bilim Kodu** : 92903

## **ABSTRACT**

**M. Sc. Thesis**

### **MODELING AND ANALYSIS OF THE VIBRATIONS OF THE MOVING MASS MODEL CREATED WITH THE HELP OF REAL TIME PERDYNAMIC DIFFERENTIAL OPERATOR**

**Ahmet Yasir YENİAYDIN**

**Karabük University**

**Institute of Graduate Programs**

**Department of Mechatronic Engineering**

**Thesis Advisor:**

**Asst. Prof. Dr., Cihan MZRAK**

**August 2022, 67 pages**

In this study, the comparison of the Peridynamic Differential Operator (PD) and Finite Element Method (FEM) over the semi-analytical solution was performed to obtain the dynamic responses of the single degree of freedom Vehicle Bridge Interaction (VBI). Newmark Beta method was preferred to apply the finite elements. for the iterations of the displacement, velocity and acceleration responses of the vehicle, three different time intervals  $\Delta t_1 = 0.01s$ ,  $\Delta t_2 = 0.001s$  and  $\Delta t_3 = 0.0001s$  are selected respectively and the bridge mid-point in the vertical direction were obtained as to these time intervals. For the first time interval, global error measurement was used for the error analysis and it was determined that the displacement, velocity and acceleration responses of the vehicle in the vertical direction converged to a semi-analytical

solution in the PD form with error rates of 0.623532 %, 0.085212 % and 0.090064 %, respectively. It was revealed that the finite element method within the same time interval did not yield any results. Similarly, it was found that the midpoint of the bridge was converted to the semi-analytical solution in the PD form with the error rates of 0.255793 % 0.077149 % and 0.119281 % for the first time interval, while the finite elements did not give any result again. When the dynamic responses of the vehicle and bridge midpoint at the second and third time intervals were examined, it was found that the PD solution gave better results with a lower error rate with respect to finite element solution. In the light of the results, it turns out that the peridynamic differential operator produces more accurate results in a shorter time when compared with the finite element method.

**Key Words** : Vehicle-bridge interaction, finite element method, peridynamic differential operator.

**Science Code** : 92903



## TEŞEKKÜR

Bu tez alıőmasının planlanmasında, araőtırılmasında, yürütölmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle alıőmamı bilimsel temeller ışığında őekillendiren sayın hocam Dr. Öğretim Üyesi Cihan MIZRAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili ailem Ramazan YENİAYDIN, Vasfiye YENİAYDIN, Gökaę Ayaz YENİAYDIN ve sevgili eşim Hilal YENİAYDIN'a maddi, manevi hiçbir yardımı esirgmeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL.....	ii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER .....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	xiii
BÖLÜM 1 .....	1
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2 .....	4
LİTERATÜR TARAMASI .....	4
2.1. HAREKETLİ YÜK MODELİ.....	4
2.2. HAREKETLİ KÜTLE MODELİ .....	5
2.3. HAREKETLİ OSİLATÖR MODELİ .....	6
2.4. EULER-BERNOULLI KİRİŞİNİN DİNAMİK ANALİZİ .....	8
BÖLÜM 3 .....	12
HAREKETLİ KÜTLE VE KÖPRÜ ETKİLEŞİMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ.....	12
3.1. HAREKETLİ KÜTLE MATEMATİKSEL MODELİ.....	12
3.2. EULER-BERNOULLI KİRİŞİNİN MATEMATİKSEL MODELİ .....	13
3.2.1. Elastik Eğri.....	13
3.2.2. Hareket Denklemi .....	15
3.3. PERİDİNAMİK DİFERANSİYEL METODU .....	20

	<b><u>Sayfa</u></b>
BÖLÜM 4 .....	24
SAYISAL DOĞRULAMA VE NÜMERİK ÇÖZÜM .....	24
4.1. HAREKETLİ YÜK - KÖPRÜ ETKİLEŞİMİN MATEMATİKSEL MODELİ .....	24
4.2. AYRIKLAŞTIRMA .....	29
4.3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ .....	34
4.3.1. Araç ve Köprü İçin Hareket Denklemleri .....	34
4.3.2. Artımlı Formda Eleman Denklemleri .....	36
4.3.4. Araç-Köprü Etkileşim Elemanı .....	41
4.3.5. Yinelemelerle Artımlı Dinamik Analiz .....	44
4.3.6. AKE Sistemi için Eşdeğer Sertlik Denklemleri .....	45
4.3.7. Yineleme Prosedürü .....	47
4.4. DOĞRULAMA VE YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI .....	50
 BÖLÜM 5 .....	 59
SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....	59
KAYNAKLAR .....	62
 ÖZGEÇMİŞ .....	 67

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

Şekil 3.1. Hareketli yük modeline ait şematik gösterim .....	13
Şekil 3.2. Elastik eğri .....	14
Şekil 3.3. Kirişin eksene dik hareketi.....	16
Şekil 3.4. Kiriş elemanının serbest cisim diyagramı.....	17
Şekil 3.5. Peridinamik teori ve klasik teorinin karşılaştırılması [47].....	20
Şekil 3.6. Malzemedeki herhangi bir noktaya etki eden kuvvetlerin Peridinamik teorisinde gösterimi [47] .....	21
Şekil 3.7. Klasik sürekli ortamlar mekaniğinde malzemedeki herhangi bir noktaya etki eden kuvvetlerin (T) gösterimi [47] .....	21
Şekil 4.1. Basitçe desteklenen bir köprü üzerinde hareket eden yaylı kütle .....	24
Şekil 4.2. $\Delta t_1$ için aracın düşey yer değiştirme tepkisi .....	52
Şekil 4.3. $\Delta t_1$ için köprünün orta noktasının dikey yer değiştirme yanıt.....	52
Şekil 4.4. $\Delta t_1$ için aracın dikey hız yanıtı .....	53
Şekil 4.5. $\Delta t_1$ için aracın dikey ivme yanıt .....	54
Şekil 4.6. $\Delta t_1$ için köprünün orta noktasının dikey hız yanıt .....	54
Şekil 4.7. $\Delta t_1$ için köprünün orta noktasının dikey ivme yanıt.....	55
Şekil 4.8. Aracın $\Delta t_2$ için dikey yerdeğiştirme (a), hız (b) ve ivme (c) cevabı.....	58
Şekil 5.1. Köprünün orta noktasının $\Delta t_2$ için dikey yer değiştirme (a), hız (b) ve ivme (c) cevabı.....	61

## ÇİZELGELER DİZİNİ

### Sayfa

Çizelge 4.1. Araç için PD ve SEY sonuçlarının dinamik yanıtlarının hata oranları.. 57

Çizelge 4.2. Köprü için PD ve SEY sonuçlarının dinamik yanıtlarının hata oranları 57

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### SİMGELER

- $E$  : elastiklik katsayısı  
 $EI_k$  : kirişin eğilmeye karşı mukavemeti  
 $EI_{zk}$  : z eksenine etrafında zorlanan kirişin eğilmeye karşı mukavemeti  
 $F_y$  : köprü üzerine etki eden kuvvet  
 $I$  : atalet momenti  
 $I_{zk}$  : z eksenine etrafında zorlanan kirişin atalet momenti  
 $k_{vh}$  : aracın yay sabiti  
 $L_{br}$  : köprü uzunluğu  
 $M$  : moment  
 $M_{zk}$  : kirişin z eksenine etrafındaki momenti  
 $m_{vh}$  : aracın kütlesi  
 $\bar{m}_{br}$  : köprünün kütlesi  
 $\rho_{zk}$  : elastik eğrilik  
 $R$  : hız parametresi  
 $v_{vh}$  : aracın hızı  
 $w_{br}$  : köprünün titreşim frekansı  
 $w_{vh}$  : aracın titreşim frekansı  
 $Z_{br}$  : köprünün dikey yer değiştirmesi  
 $Z_{vh}$  : aracın dikey yer değiştirmesi  
 $\Delta_t$  : zaman değişimi  
 $\delta_{st}$  : kirişin ota açıklığının static sapsması  
 $\delta_u$  : bilinmeyen vektörün keyfi varyasyonu

## **KISALTMALAR**

**AKE** : Araç Köprü Etkileşimi

**PDO** : Peridinamik Diferansiyel Operatör

**SCD** : Serbest Cisim Diyagramı

**SD** : Serbestlik Derecesi

**SEY** : Sonlu Elemanlar Yöntemi

**TRE** : Tren Ray Etkileşimi

**HOT** : Higher Order Terms (Yüksek Dereceli Terimler)

**FEM** : Finite Element Method (Sonlu Elemanlar Yöntemi)

**VBI** : Vehicle Bridge Interaction (Araç Köprü Etkileşimi)

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Seyrüsefer esnasında araçlar, farklı yol şartlarından ötürü çeşitli yönlerden dinamik yüklere maruz kalmaktadırlar. Bu yol şartları sabit zemin üzerinde olabildiği gibi köprü geçişlerinde hareketli yük şeklinde de karşımıza çıkmaktadırlar. Hareketli yük ortamında köprünün sahip olduğu mekanik özellikler araç üzerindeki dinamik kuvvetleri ortaya çıkartırken, araç parametreleri de köprü üzerinde dinamik yüklerin oluşmasına neden olmaktadır. Bu yüzden araç-köprü etkileşimi iç içe geçmiş dinamik bir problem çeşididir.

Düz, pürüzsüz ve rijit bir zeminde sabit hız ile ilerleyen bir aracın kontak noktalarına temas eden kuvvetler aracın ağırlığından kaynaklandığı gibi, yoldan gelen dinamik etkilerde araç üzerinde dinamik kuvvetlerin oluşmasına neden olmaktadır. Araç üzerine statik kuvvetlerin etkisi dinamik kuvvetlerden daha etkin olduğundan araç bileşenlerin üzerindeki kuvvetlerin belirlenmesi önem arz etmektedir. Bu sebeple araç bileşenleriyle alakalı yapısal bir analiz yapılacaksa sadece araç bileşenlerinden kaynaklı statik yükleri dikkate almak yeterli olacaktır. Araçtaki bileşenlerin üzerine etki eden kuvvetleri belirleyebilmek için bileşenlerin ayrı ayrı SCD (Serbest Cisim Diyagramı) leri çizilir. Bu metot basit, uzun zaman almayan, az masraflı ve uygulanabilir olması nedeniyle pratik mühendislikte kullanılabilir. Ancak başlangıçta sunulan şartların (düz yol, pürüzsüz ve rijit zemin, sabit hız gibi) normal hayatta çok da mümkün olmaması nedeniyle sonuçlar ileri mühendislik uygulamalarında kullanılmaz.



Gerçekte yolun pürüzsüz ve düz bir şekilde elde edilmesi imkansızdır. Çünkü zeminden geçen belli bir ağırlığı olan aracın tekerlek temasından dolayı zeminde kalıcı bozulmalar oluşmaktadır. Bu bozulmalar zeminin rijitliğinden etkilenir. Yüksek rijitliği olan beton gibi bir zeminde bozulmalar araç aks ağırlığına bağlı olarak düşük seviyelerde olurken düşük rijitliği olan toprak gibi bir zeminde bozulmalar daha yüksek seviyelerde olacaktır. Bu duruma benzer şekilde köprü gibi esnek yapılarda zemin rijitliğinden kaynaklı ağır tonajlı kamyon, tren vb. araçlar geçtiğinde tekerlek kontak noktalarında enine ve dikey yönde bozulmalar meydana getirir. Oluşan bozulmalardan kaynaklı esnek yapı üzerinde ilerleyen araç düz bir yörüngede hareket etmesi gerekirken köprünün üzerinde meydana gelen hareketli yükün etkisiyle oluşan yapısal sehim üzerinde hareket etmeye zorlanmaktadır. Böylece coriolis (dönen bir yüzeyin merkezinde dışa doğru hareket eden cisme harekete dik yönde etki eden kuvvet), centripetal (merkezcil kuvvet) ve atalet kuvvetlerini oluşturmaktadır. Oluşan bu kuvvetlerden dolayı tekerlek kontak noktalarındaki dinamik etkiler, daha öne ifade edilen statik kuvvetlerin etkilediği duruma göre daha çok ortaya çıkmaktadır. Nedeni bu kuvvetler statik yükler ile tekerlek kontak noktasındaki bozulmaların sebep olduğu kuvvetlerdir. Tekerlek kontak noktasında oluşan kuvvetlere, aracın köprüdeki hareketi zaman içerisinde meydana geldiği için bu kuvvetler dinamik kontak kuvvetlerinin ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Esnek yapı nedeni ile hareketli aracın kontak noktası arasındaki enine bozulmalar, dinamik kontak kuvvetlerinin kaynaklarından biridir. Ancak bununla birlikte dinamik kontak kuvvetlerini etkileyen önemli diğer bir etken de esnek yapı ve hareketli aracın kontak noktası arasındaki yüzeyin yol kalitesini temsil eden yolun pürüzlülüğüdür. Nedeni esnek bir yapının üzerindeki yolun pürüzlülüğü köprü sol ucundan kaynak alındığı konuma göre yüksekliği ifade eden bir fonksiyon ile tanımlanır. Esnek yapı üzerinde bir noktadaki enine bozulma miktarı ile yol pürüzlülük fonksiyonunun toplamı tekerlek kontak noktasındaki toplam yer değişimine eşittir. Yani; yol pürüzlülük fonksiyonunun rastgele bir dağılımı var ise tekerlek kontak noktasındaki toplam yer değiştirme kimi durumlarda enine bozulma miktarından daha az veya daha fazla olabilmektedir. Bu durum tamamen esnek yapıdaki noktanın yol pürüzlülük fonksiyonu değeri ile alakalıdır.

Çalışmada mevcut çalışmalardan farklı olarak peridinamik (PD) diferansiyel operatör yardımıyla yarı analitik araç köprü etkileşiminin sayısal yol ile dinamik cevaplarının elde edilmesi planlanmıştır. Tek serbestlik dereceli araç-köprü modelinin yarı analitik çözümünün, PD ve Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) sonuçları ile karşılaştırılmasıyla, Peridinamik Diferansiyel Operatörün Sonlu Elemanlar Metoduna göre daha kısa sürede yarı analitik çözüme yakınsayacağı öngörülmektedir.

Çalışmanın beş bölüme ayrılarak planlaması yapılmıştır. Birinci bölümde konu ile ilgili giriş niteliğinde bilgilerden sonra, ikinci bölümde bu alanda yapılan literatürdeki çalışmalar konularına göre ayrılarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde araç-köprü etkileşiminin matematiksel modeli çıkartılarak, dinamik cevap için gerekli parametrelerin eldesi ve PDO modelinin izahı ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde, oluşturulan PDO ve SEY diferansiyel denklemlerinin, çözümünde 4. Dereceden Runge Kutta sayısal çözüm metodu uygulanarak sistem çıkışlarının cevapları elde edilip, yarı analitik sonuçlar ile karşılaştırılması yapılmıştır. Son bölüm olan sonuçlar ve tartışma kısmında ise farklı zaman aralığında PDO ve SEY'in kıyaslaması yapılarak PDO'nin daha kısa sürede yarı analitik sonuca yakınsadığı elde edilmiştir.

## BÖLÜM 2

### LİTERATÜR TARAMASI

Bu zamana kadar araç ve köprü arasındaki dinamik etkileşimi ortaya çıkarmak için yapılan çalışmalar incelendiğinde köprü üzerinde hareket eden araç hareketli yük, [1] hareketli kütle [2-4] ve hareketli osilatör [5-7] olarak modellenmiştir. Bunun yanında daha karmaşık araç modelleri kullanılarak [8-13] daha gerçekçi araç köprü etkileşiminin dinamik davranışları incelenmiştir. Son zamanda yapılan çalışmalar daha çok köprünün gerçek zamanlı olarak izlenebilmesi için köprü üzerinde sensörler ile donatılmış araçlardan faydalandığı ortaya koymaktadır. [14-17]. Oluşturulan modellerin çözümünde analitik ve sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan basitleştirilmiş modeller için kapalı çözümler [1,18] mevcut iken, daha karmaşık kompleks yapıda sistemler için sonlu elemanlar metodu [8,10,14] ya da modal süperpozisyon yaklaşımı [4,7,11,13] kullanılmıştır. Zamana bağlı değişken tipteki bu diferansiyel denklemlerin sayısal olarak çözümünde Newmark ortalama ivme metodunun daha stabil sonuçlar ortaya çıkardığı için tercih edildiği görülmektedir. [8,10,12,19,21].

#### 2.1. HAREKETLİ YÜK MODELİ

19. yy. ortalarına doğru hareketli yüklerin dinamik etkisinin araç ve köprü üzerine etkileri araştırmalar sonucunda tespit edilmiştir. Hareketli yük problemleri ile ilgili araştırmalar 1847 yılında İngiltere’de Stephenson Köprüsü’nün yıkılmasıyla artış göstermeye başlamıştır [22]. Araştırmacıların özellikle dikkatini çeken bir konu olan kiriş, plaka, yay üzerinde hareket halinde olan ataletli yükler üzerinde çalışmaların sayısı da aynı oranda artış göstermiştir. TRE [23], AKE [21], manyetik raylar [24] ve robotik çözümlerinde sistemlerin fiziksel durumunu gösteren diferansiyel eşitlikler

için geliştirilmiş olan teorik çözümler kullanılmış, 19. yy. ortalarına gelindiğinde bu gibi problemlerin çözümü üzerine farklı çalışmaların geliştirildiği ortaya çıkmıştır. Fakat yoğunlaştırılmış kütle hareketinden dolayı bugüne dek kesin bir analitik çözüm üretilememiştir. Bazı durumlar için sistemlerin diferansiyel denklemlerini analitik yoldan kapalı çözmek çok zor olduğu için SEY gibi nümerik yöntemleri kullanılarak bu problemler analiz edilebilmektedir.

Bu sorunların birleştiği nokta ise hareketli bir yükün geçiş anında oluşan yer değiştirme yükün yavaş bir şekilde yer değiştirdiği durumda veya yükün statik olduğu duruma göre çok daha fazla olmaktadır. Yani; bozulma yaşanmamış esnek bir yapı ani bir yüke maruz kaldığında bu yapı denge halinde titreşim yaymaya başlar. Bu yapının denge halinde yaymaya başladığı titreşim, hareketli olduğu durumda iken statik duruma göre iki kat daha fazladır. Bu nedenle hareketli yükün hızla yapıya giriş yapması daha az etkiye sahiptir. Hareketli yük bazı belli frekanslarda olursa oluşan maksimum yer değiştirmeler ve gerilmeler çoğalacaktır [25, 26].

Hareketli yük modeli ile alakalı çalışmalara bakıldığında; Sadiku ve Leipholz, yaptıkları çalışmalarında (1987), yoğunlaştırılmış bir kütle tarafından çaprazlanan bir kirişin dinamik tepkisini değerlendirme problemi, "hareket eden-kuvvet hareketli-kütle" hakkında çalışılmıştır. Desteklenen elastik bir sistemin (kiriş veya plaka) dinamik tepkisini değerlendirme problemi karayolları, demiryolları ve köprülerin analizi ve tasarımları için önemlidir [1].

## **2.2. HAREKETLİ KÜTLE MODELİ**

Hareketli kütle modeli ile alakalı çalışmalara bakıldığında; Akin ve Mofiid yaptıkları çalışmalarında (1989), hareketli bir kütle taşıyan kirişlerin farklı sınır koşullarında dinamik davranışlarını tespit etmek için analitik-sayısal bir yöntem geliştirmişlerdir. Yine bu çalışmada hareket denklemlerinin, çözülebilir bir adi diferansiyel denklemler dizisine dönüştürülmesi açıklanmıştır. Sonuçların nümerik yoldan çözümü için sonlu eleman modelleri kullanılmış ve analitik yöntem ile karşılaştırma yapılarak doğruluğu

tespit edilmiştir. Çalışmada numerik sonucun analitik çözüme iyi bir şekilde yakınsadığı tespit edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, önceden çoğunlukla göz ardı edilen hareketli kütlelerden dolayı oluşan yapıların tepkisinin, çoğunlukla hareketli kuvvet modelinden çok farklı olduğu için kesinlikle dikkate alınması gerektiği gösterilmiştir. Yine bu çalışma da farklı sınır koşullarında, hareketli bir kütle taşıyan kirişlerin tepkisini tespit edebilmek için bir yöntem sunulmuştur. Bu yöntem, ortogonal fonksiyonlara dayandırılmıştır. Buradan çıkan sonuçlar ise hareket denkleminin bir dizi eşleştirilmiş adi diferansiyel denkleme dönüştürülebileceğini göstermiştir. Bazı özel test problemleri hem sonlu eleman modeli hem de hareket yöntemi ile çözülmüştür. Buradan çıkan sonuçların karşılaştırılması, iki çözüm arasında oldukça benzer olduğu tespit edilmiş ve sistemin hareketli kütlelerinin çok önemli bir rolünün olduğunu ortaya çıkarmıştır. Aynı zamanda bu sayısal-analitik yöntem, bu alandaki diğer birçok probleme uygulanabilir olduğunu göstermiştir [2].

Gaon ve Zhang yaptıkları çalışmalarında (2016), rastgele yüzey düzensizlikleri ile sonlu gerilmiş bir ip boyunca sabit bir hızla hareket eden sıkıştırılmış bir kütlelerin stokastik analizi için analitik çözümünü oluşturmuş ve sunmuşlardır. İlk önce, rastgele yanıtın spektral güç yoğunluğunun (PSD) hesaplanması problemi, harmonik rastgele yüzey düzensizlikleri ile gerilmiş bir ip boyunca sabit bir hızla hareket eden sıkıştırılmış bir kütlelerin geçici cevabını hesaplama problemine çevrilmiştir. Bunun ardından, harmonik olarak değişen yüzey düzensizlikleri için ip ve kütle arasındaki kontak kuvvetinin analitik çözümlerini oluşturmuşlar ve en son, kontak kuvvetinin PSD'leri ve ipin yer değiştirmesi, rastgele yüzey düzensizliklerinin PSD'si cinsinden tayin edilmiştir. Analitik çözümler, ses altı, ses üstü veya ses üstü hızların üç durumunu da içine almaktadır. Tavsiye edilen yöntem, yarı analitik yöntem ile karşılaştırmaya dayalı olarak teyit edilmiştir [3].

### **2.3. HAREKETLİ OSİLATÖR MODELİ**

Hareketli osilatör modeli ile alakalı araştırmalar incelendiğinde; Martinez-Castro, Museros, ve Castillo-Linares yaptıkları çalışmalarında (2006), hareketli kuvvetlerin

(yüksek hızlı tren gibi) etkisinde kalan çok açıklıklı üniform ve üniform olmayan kirişlerin analizinin çözümü için hareketli yük probleminin yarı analitik bir çözümü kullanılmıştır. Kullanılan bu çözümde trenin sabit hızdayken birim yüke yapının tepkisine dayanmaktadır. Bernoulli–Euler kiriş elemanları değişken kesit özelliklerine sahiptir. Bu kiriş elemanları kullanılarak yapı ayrıklaştırılır ve mod şekilleri standart bir metot uygulanarak hesaplanır. Hareketli yük, üniter bir Dirac Delta fonksiyonu ile gösterilir ve modal yükler kübik Hermit polinomları cinsinden oluşturulur. Çözüm, değerleri hareketli yükün hızından ayrı olarak mod ve eleman başına 10 katsayı olarak gösterilir. Sonuçta bir dizi yüke yanıt, kolay bir şekilde her birinin katkısı eklenerek oluşturulur. Genel metot, herhangi bir bütünleşme adımına gerek kalmadan çözümü kontrol etmek için seçilen zaman adımına ve uzaysal ayrıklaştırmaya bağlı olarak doğru ve hızlıdır. Bu kullanılan tekniğin etkinliğini ortaya koymak için sayısal testler dahil edilmiştir [5].

Chatterjee, Datta ve Surana yaptıkları çalışmalarında (1992), Üzerinden hareket eden bir araç geçen çok açıklıklı sürekli bir köprünün dinamik tepkisini bulmak için süreklilik yaklaşımı kullanılmıştır, araç yaylı ya da yaysız kütle olarak modellenmiştir. Cevap, köprü kaplaması (köprü zemininde kullanılan malzeme) ve köprü burulmasının simüle edilmiş gelişigüzel düzensizliği ve araç köprü arasındaki etkileşimin lineer olmayan etkileri önemsiz olarak zaman alanında sağlanmıştır. Bu analiz yöntemi sayesinde, önemli parametrelerin köprünün dinamik davranışı üzerindeki etkileri araştırmak için parametrik bir çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmanın sonucunda; burulma sert sürekli köprüler için, araç yolundaki eksantriklikten kaynaklanan burulma kuplajının dinamik büyütme faktörü üzerindeki etkisinin önemsiz olduğu, yüzeyi pürüzlü olmayan bir köprü kaplaması için, aracın yaylı ve yaysız kütle idealleştirmeleri, köprü için yaklaşık aynı tepkiyi verdiği, köprü üzerindeki kaplamanın rastgele düzensizliği çözümlenmeye eklenirse, yaylı ve yaysız kütle idealizasyonu büyük oranda farklı sonuçlar verdiği görülmüştür. Her iki durumda da yanıtlar, düzgün bir köprü kaplaması için olanlardan önemli ölçüde farklıdır ve yüksek oranda frekans oranı ve hız parametresinin değerlerine bağlıdır [6].

Pesterev ve Bergman yaptıkları çalışmalarında (1997), Hareketli bir lineer osilatör taşıyan sürekli elastik bir yapının dinamik tepkisinin denklemini çözmek için bir yöntem ifade edilmiştir. Bu yöntem, sorunu sürekli yapının öz fonksiyonları cinsinden yanıtın seri açılımının zamana bağlı katsayılarını yöneten lineer adi diferansiyel denklemler sisteminin entegrasyonuna dönüştürülür. Yöntem kolay ve oldukça basittir. Ayrıca isteğe bağlı sınır koşulları ile herhangi bir uzaysal olan tek boyutlu sürekliliğe uygulanabilir. Bu konuda yapılan daha önceki çalışmaların çoğunluğunun tersine, doğrusal bir yay boyunca sürekli elastik sistem olan sıkıştırılmış kütlelerin etkileşime girdiği duruma bakılmaktadır. Problem "hareket eden osilatör" problemi olarak adlanmaktadır. Hareket eden kütle probleminden hariç hareket eden osilatörü hesaba katmamızın sebepleri basit ve kısa bir şekilde anlatılmaktadır. En başta, bazı mühendislik uygulamalarında hareketli osilatör modelinin daha gerçekçi olduğu görülmüştür (örnek; esnek bir yapıdan geçen yaylı araç). Bu şekilde etkileşimin etkileri daha önemli hale gelmektedir ve bu tarzdaki problemleri çözmek için yöntemler oluşturulmaya çalışılmıştır. Daha sonra, hareketli kütle problemi, incelenen problemin sınırlayıcı durumu olarak ortaya çıkabilir ve sınırlayıcı duruma çözüm olarak tartışılan yöntem bağlamında, yay sertliğinin daha büyük değerleri seçilerek bulunabilir. Son olarak hareketli osilatör probleminin çözümü hareketli kütle probleminin çözümünden çok daha kolay bir şekilde bulunabilir. Asıl olarak bu çalışmada sunulan hareketli osilatör problemini çözmeye yöntemi ek olarak hareketli kütle probleminde de çok kolay bir şekilde kullanılmaktadır. Hareketli osilatörden hareketli kütle çözümüne analitik olarak limit geçişi yapılabilir [7].

#### **2.4. EULER-BERNOULLI KİRİŞİNİN DİNAMİK ANALİZİ**

Günümüzde toplumların ekonomik gelişmişlikleri ile buldukları yerin ulaşım alt yapısı arasında önemli düzeyde bir bağıntı vardır. En temel ulaşım alt yapısını ise köprüler oluşturmaktadır. Teknik çalışmalarda bu tarz yapılar modellenirken çoğunlukla köprü kirişi şeklinde yapılmaktadır. Esasen köprü kirişleri sahip oldukları tarafsız eksenin enine veya dikine uygulanan kuvvetlere karşı koyan yapısal bir elemandır [27].

Bu konu üzerine yapılan ilk çalışmalarda köprü dinamiğinde kiriş sistemi için en önemli değişkenin bu yapılarda bir dış kuvvetin zorlaması altında enine titreşim oluştuğundaki eğilme etkisi olduğu sunulmuştur. Yapılan bu çalışmalarda köprü kirişinde oluşan enine titreşim de diferansiyel denklemler Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile bir başka deyişle de klasik kiriş teorisi ile oluşturulmaktadır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi Bernoulli, ve Euler tarafından 18. yy.'da geliştirilmiştir [28-30]. Euler-Bernoulli kiriş teorisi çok yaygın bir şekilde basit köprü mühendisliği uygulamalarında kullanılmaktadır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, kirişin bükülmesiyle kesit düzleminin düzlemde ve tarafsız eksene dik kaldığı hipotezine dayanan bir teoridir. Bu nedenle enine baskı sıfır olmaktadır.

Euler-Bernoulli kiriş teorisi kolay ve çok fazla kullanım alanına sahiptir. Fakat bu teori köprü kirişlerine ait doğal frekansların değerini normalden bir miktar fazla tespit eder.

Bu durum düşük titreşim modlarında çok da dikkat çekmez ancak daha yüksek titreşim modlarında bu durum alenen göz önüne çıkmaktadır. Bu yüzden yeni bir kiriş teorisi oluşturulmuştur. Oluşturulan yeni teoride Euler-Bernoulli kiriş teorisine dönme bozulması eklenmiştir. Timoshenko yeni teorisini Euler-Bernoulli kiriş teorisine dönme ve kayma etkisini de ekleyerek geliştirmiştir [31]. Kayma ve dönme etkileri düşük seviyelerde veya kirişler ince ve uzun olduğunda Euler-Bernoulli kiriş teorisinde ufak düzeltmeler yeterli olurken, herhangi bir kiriş için yüksek seviyelerde veya kalın kirişlerde dönme ve kayma etkileri dikkate alınmadığında ortaya çıkan hata daha büyük olacaktır.

18.yy.'da Love (1944) tarafından ilk defa düz kirişlerin genel elastisite denklemlerinin tam çözümleri üzerine çalışılmıştır [32]. Bu çalışmayı yapan araştırmacılar katı silindirelerin titreşimlerini temsil eden denklemleri bulmuşlardır. Ancak bu denklemlerin kesin çözümlerini ortaya çıkaramamışlardır. İlk araştırmacılar bu konu üzerine çok fazla araştırma yapmışlar ve konuya farklı açılardan yaklaşmışlardır. Kiriş dinamiği için dört farklı kuramı literatüre eklemiştirler. Bunlar; Euler-Bernoulli, Timoshenko, Rayleigh ve shear kiriş kuramlarıdır. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde kinetik enerji ve gerinim enerjisi yanal yer değiştirmenin ve eğilmenin bir fonksiyonudur. Bu teorinin kolaylığı ve



akıllı mühendislik yaklaşımından kaynaklı kiriş dinamiği çalışmalarında çokça tercih edilmektedir.

Han vd. (1999), bu dört farklı kiriş teorisini kullanarak bir kiriş sisteminin doğal frekansını tahmin etmiştir [33]. Bulduğu sonuçlar Rayleigh modeli ile Euler-Bernoulli teorisinin sonuçlarının birbirine çok yakın olduğunu ortaya koymuştur. Yine aynı şekilde shear model ile Timoshenko teorisinden çıkarılan sonuçlarında birbirine çok yakın sonuçlar olduğu gösterilmiştir.

Kiriş tipi yapılar daha önceden de ifade edildiği gibi mühendislik çalışmalarında çok sık kullanılmaktadır. Ayrıca zaman içerisinde değişen kuvvetler bu yapılara etki etmektedirler. Yapılan uygulamalı araştırmalarda köprü kirişi gibi yapıların dinamiğinin (örneğin gerilmeleri ve enine yer değiştirmeleri gibi) yükün statik olduğu durumdan çok daha fazla olduğunu göstermektedir. Son yıllarda bu konuda yapılan çalışmaların büyük bir kısmının dinamik yükleme olması da bu sebeptendir. Dinamik yükleme üç alt başlıkta incelenebilir: Bunlar hareketli kütle, köprü üzerinde basitleştirilmiş hareketli araç modeli ve hareketli sabit yüküdür. Bunlar içerisinde en basiti hareketli sabit yük modelidir. Bu modelde aracın atalet etkisi ile araç ve köprü arasındaki etkileşim yok sayılmıştır. Hareketli kütle modelinde ise bu durumun aksine bu etkiler yok sayılmamış sisteme dahil edilmiştir. Bu modelde de bu etkiler dahil edilirken aracın köprü ile etkileşimi anındaki gövde zıplaması yok sayılmıştır. Dmitriev (1976), hareketli yük etkisindeki köprü kirişini Euler-Bernoulli teorisine göre tasarlamış ve bunun analitik çözümlerini sunmuştur [34]. Olsson (1991), Euler-Bernoulli kirişinin sabit hız ile hareket eden hareketli yük etkisindeki dinamiğinin analitik ve sonlu elemanlar analizini meydana getirmiştir [35]. Zheng vd. (1998), multi-span uniform olmayan kesite sahip hareketli yük etkisindeki kirişin dinamik cevabına bakmışlardır. Zheng vd. (1998), Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre köprü kirişini modellemiş, sonrasında ise diferansiyel eşitlikleri yani sistemin hareket denklemini bulmak için Hamilton prensibinden faydalanmışlardır [36]. Bu çalışmayı yapanlar, farklı hızlarda hareket eden hareketli yük için uniform ve non-uniform kirişlerinin her ikisi içinde buldukları nümerik analizler ile tanımlamışlardır. Stanisic and Hardin (1969), Fourier tekniğini

kullanarak basit mesnetli köprü kirişi üzerinde herhangi bir sayıda kütlelerin geçtiği kiriş analizini yapmışlardır [37]. Jeffcott (1922), köprü kirişinin hareketli yük etkisi altında olduğu durumu hareketli kütlelerin atalet etkisini de dikkate alarak ilk defa analiz etmiştir. Ting vd. (1974) yaptıkları çalışmalarında, hareketli yük etkisindeki sonlu elastik kirişin dinamik etkisine bakmak için yeni bir algoritma oluşturmuşlardır [38]. Yapılan çalışmalarda ortaya çıkan sonuçlar bunları yapan bilim insanları tarafından deneysel veriler ile karşılaştırılmıştır.

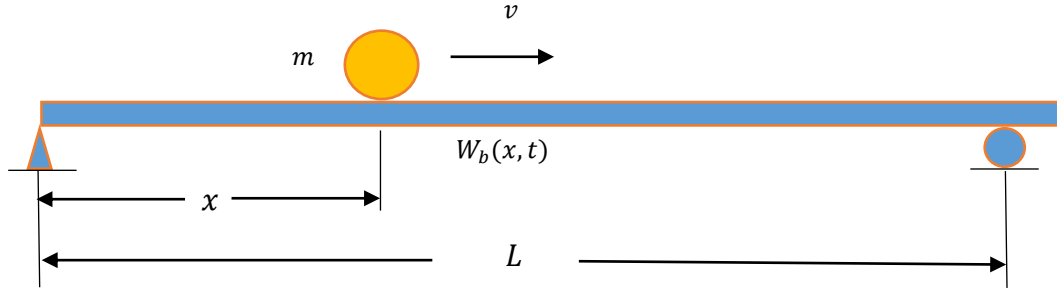
Akın ve Mofid (1989) hareketli yük etkisindeki ince kesitli kiriş üzerine çalışmışlar yapmışlardır. Bu konu üzerine çalışanlar hareketli yük etkisindeki köprü kirişine ait ortaya çıkardıkları hareket denklemlerini adi diferansiyel denklem serisi olarak yazılabileceğini kanıtlamışlardır [2]. Esmailzadeh ve Ghorashi (1995), yaptıkları çalışmalarında uniform taraflı olarak yayılı hareketli yük etkisindeki basit mesnetli Euler-Bernoulli kirişinin analitik çözümünü sunmuşlardır [39]. Esmailzadeh ve Jalili (2003), yaptıkları çalışmalarında yarım araç modeli iki akslı olup, bu modele yolcu ve şoför koltuklarını da ekleyerek sistemin serbestlik derecesini yükseltmişlerdir. Bu çalışmalarında yaptıkları yarım araç modelini basit mesnetli Euler-Bernoulli kirişi üzerinde hareket ettirmektedirler. Burada şoför ve yolcu koltuğu, gövde, tekerlekler gibi araç elemanlarının dinamik cevabına bakmışlardır [40].

## BÖLÜM 3

### HAREKETLİ KÜTLE VE KÖPRÜ ETKİLEŞİMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ

#### 3.1. HAREKETLİ KÜTLE MATEMATİKSEL MODELİ

Hareketli araç ve köprü arasında meydana gelen titreşimleri modellemek amacıyla geliştirilmiş olan en basit model Şekil 2.2’de verilen hareketli yük modelidir. Verilen modelde aracın dinamik etkileri göz ardı edilmiş köprü dinamiği dikkate alınmıştır. Köprü üzerinde hareket ettirilen sabit dikey kuvvet aracın tekerlek yükleri ve aks yüklerini basite indirgenerek oluşturulmuştur. Oluşturulan bu kuvvetin hareket hızı ile aracın hareket hızları birbirine eşittir. Dolayısıyla buradaki hareketli yük modelinde araç ve köprü etkileşimi ihmal edilmiş ve aracın atalet etkileri de ihmal edilmiştir. Aracın kütesinin köprü kütesi yanında oldukça küçük kaldığından ve yalnızca köprü dinamiği ile ilgilenildiğinden dolayı bu yöntem geçerliliğini korumaktadır. Bu konu Yang (2004), tarafından oldukça sık çalışılmıştır [41]. Ayrıca yolun ya da rayın pürüzlülüğü ray birleşme noktaları gibi yapılarında etkileri ihmal edilirse bu yöntem köprü dinamiği açısından geçerliliğini korumaktadır ve daha çok kapalı çözümleri mevcuttur. Hareketli yük metodu yaklaşık bir çözüm olmasına karşın çözüm basitliği açısından en çok kullanılan metottur. Bu konudaki diğer bazı çalışmalar [42, 43–45].

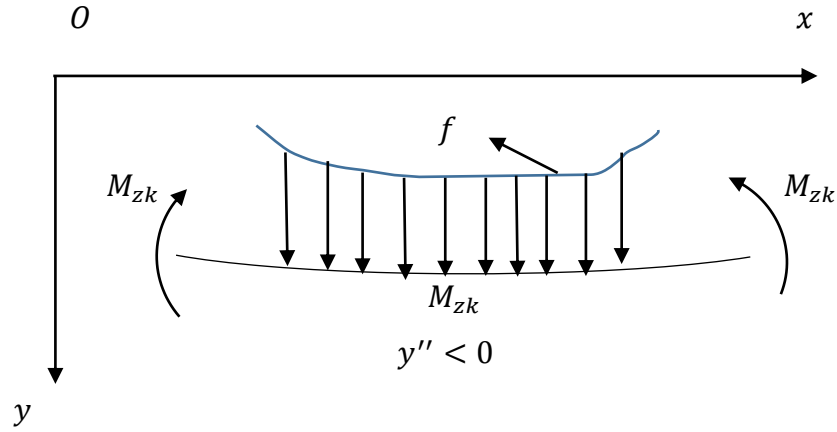


Şekil 3.1. Hareketli yük modeline ait şematik gösterim [46].

## 3.2. EULER-BERNOULLI KİRİŞİNİN MATEMATİKSEL MODELİ

### 3.2.1. Elastik Eğri

Kirişin elastik eğrisi kullanılarak kirişlerin dik doğrultudaki titreşim hareketlerinin diferansiyel denklemi elde edilir (Şekil 3.2). Yer değiştirme vektörünün yatay bileşeni  $x$ , dikey bileşeni  $y$  ile gösterilsin. Kiriş eksenine doğrultusundaki  $x$  yer değiştirmesi, eksene dik doğrultudaki  $y$  yer değiştirmesinin yanında her zaman bir kademe küçük olduğu için ihmal edilebilir.



Şekil 3.2. Elastik eğri [47].

Elastik eğri probleminde mühim nokta  $y(x)$  çökmeleri ve bu çökmeleri oluşturan  $f_y$  yükleri arasında bir bağıntı kurmaktır. Eğer aranan bu bağıntının kirişin uç şartlarından bağımsız olması isteniyorsa, bağıntı türevlerle ifade edilen bir diferansiyel denklem olmalıdır. Eğrilik – moment bağıntısından bu denkleme varılabilir.

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_{zk}}{EI_{zk}} \quad (3.1)$$

$\rho_z$  eğriliği ile  $y(x)$  arasındaki bağıntının

$$\frac{1}{\rho_{zk}} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (3.2)$$

olduğu diferansiyel geometriden bilinmektedir. Böylece eğrilik ve moment arasındaki bağıntı

$$\pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M_{zk}}{EI_{zk}} \quad (3.3)$$

elde edilir. Eşitlik 3.3'deki iki farklı işaret, eğilme momenti için kabul edilen işaret prensibine ve seçilen koordinat takımının yönüne bağlıdır. Bu çalışma kapsamında yapılan hesaplamaların tümünde dikey doğrultu için yukarı yön negatif alınacaktır. Bu durumda Eşitlik 3.3'deki işaretin negatif alınması gerekir.

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_{zk}}{EI_{zk}} \quad (3.4)$$

Yukarıdaki ifade  $y(x)$  fonksiyonuna göre lineer değildir.  $y'$  eğiminin yatk eğrilerde küçük olduğu kabul edilerek  $y'$  ifadesini karesi birin yanında göz ardı edilirse Eşitlik 3.5 aşağıda verildiği gibi lineerleştirilmiş olur.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_{zk}}{EI_{zk}} \quad (3.5)$$

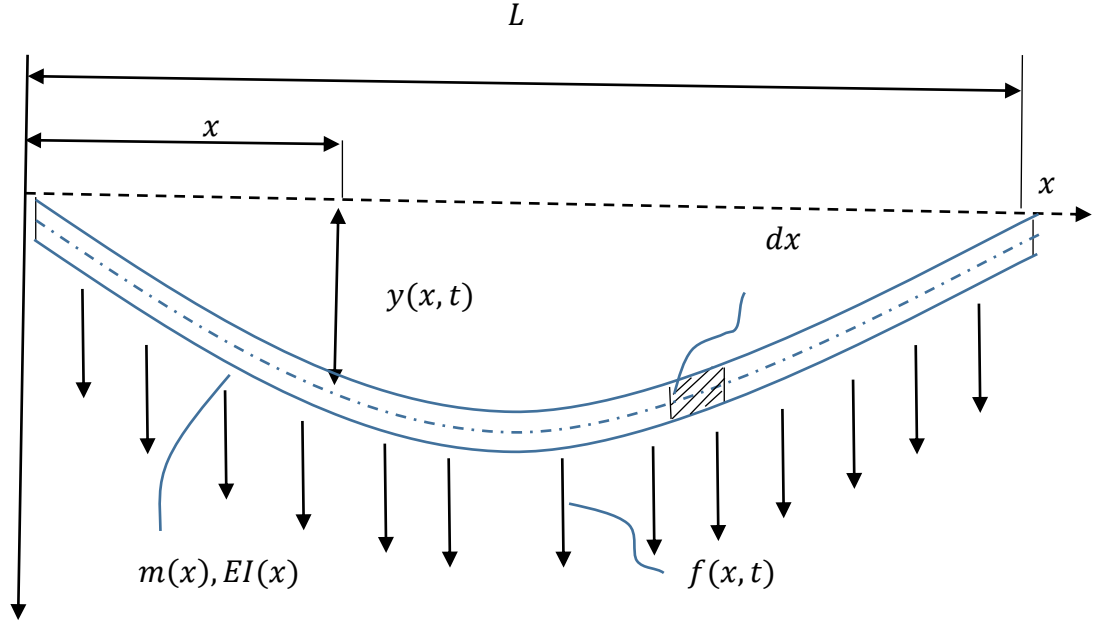
Bu durumda moment ifadesi,

$$M_{zk} = -EI_{zk} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) \quad (3.6)$$

bulunur.

### 3.2.2. Hareket Denklemleri

Sekil 3.2 de verilen şekilde  $y(x,t)$  kirişin eksene dik doğrultudaki yer değiştirmesini,  $f(x,t)$  kirişin üzerine etkiyen dış etkileri ifade etmektedir. Sekil 3.2 de kiriş üzerinde  $dx$  uzunluğundaki bir diferansiyel elemanın serbest cisim diyagramı gösterilmektedir. Burada,  $EI(x)$  kirişin rijitliğini,  $c(x)$  kirişin kendi sönümünü ve  $m(x)$  birim uzunluğunun kütleini ifade etmektedir.

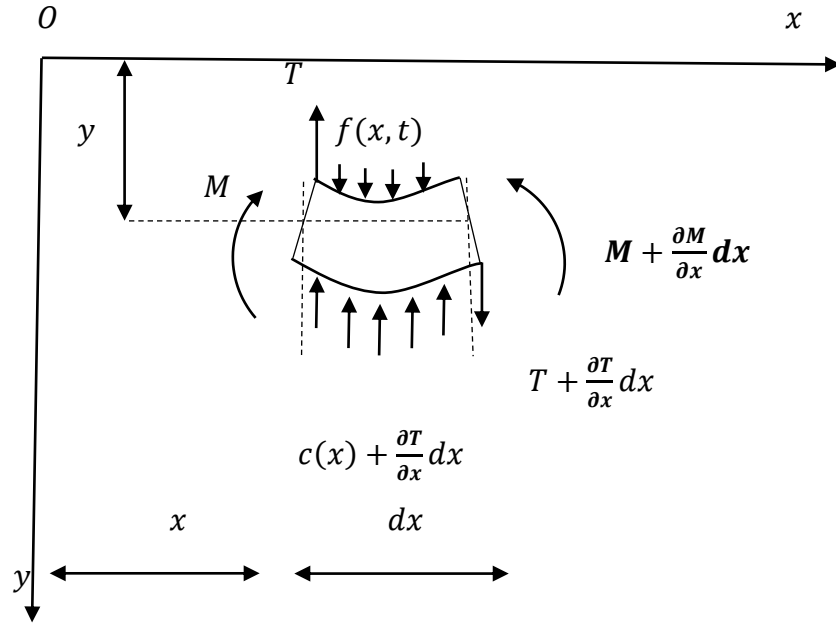


Şekil 3.3. Kirişin eksene dik hareketi [47].

Burada, Euler – Bernoulli kiriş teorisi olarak isimlendirilen birincil kiriş teorisi kullanılacaktır. Bu teoriye göre, diferansiyel elemanın dönmeden ötelendiği, yer değiştirmelerin çok büyük olmadığı kabul edilir. Böylece kirişin dönme etkileri ve yatay yer değiştirmeler ihmal edilebilir. Buna göre Şekil 3.4 de gösterilen diferansiyel eleman için düşey eksendeki hareket denklemi

$$+\downarrow \sum F_y = m(x)dx \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (3.7)$$

Şeklindedir.



Şekil 3.4. Kiriş elemanın serbest cisim diyagramı [47].

Kuvvetler yerlerine yazılarak ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
 T(x, t) + \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dx - T(x, t) - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} dx + f(x, t) dx \\
 = m(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Kiriş eksenine dik doğrultudaki hareket denklemi

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} + f(x, t) = m(x) dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \tag{3.9}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $(x, y)$  noktasından geçen eksen etrafındaki moment denklemi de



$$\sum M_{x,y} = 0 \quad (3.10)$$

$$M(x, t) - \left[ M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] + \left[ T(x, t) + \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dx \right] dx - \left[ c(x) \frac{\partial y}{\partial x} dx \right] \frac{dx}{2} + (f(x, t) dx) \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.11)$$

ifadesine eşittir. Eşitlik 3.11 ile ifade edilen moment denkleminde ikincil terimler ihmal edilerek moment ve kesme kuvveti arasındaki

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - T(x, t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.12)$$

bağıntısına ulaşılır. Eşitlik 3.12 ile elde edilen moment denklemini  $x$  e göre tekrar düzenlenerek

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.13)$$

İfadesi elde edilir. Burada  $\partial T(x, t) / \partial x$  ifadesi Eşitlik 3.9'dan alınarak Eşitlik 3.13'de yerine yazıldığında kirişin hareket denklemini aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} + f(x, t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.14)$$

Euler – Bernoulli kiriş kuramına göre eğilme momenti Eşitlik 3.6'da verilmişti. Eğilme momenti Eşitlik 3.14'de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} + f(x, t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.15)$$

ve yeniden düzenlenirse aşağıdaki son şeklini alır

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t), \quad 0 < x < L \quad (3.16)$$

Burada, kirişin  $EI(x)$  rijitliği,  $c(x)$  sönüm oranı ve  $m(x)$  birim uzunluğunun kütlesi kiriş eksenine boyunca sabit ise; Eşitlik 3.16 ifadesi

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad 0 < x < L \quad (3.17)$$

şeklinde daha sade bir ifade ile gösterilebilir. Bu ifade, Euler – Bernoulli kiriş teorisi olarak bilinir. Kiriş  $x$  eksenine boyunca bir boyutlu cisim gibi kabul edilirse,  $y(x, t)$  eğrisi kirişteki çökmeyi tanımlar. Basıncın bir ifadesi olarak tanımlanan yayılı yük  $f(x, t)$  ise,  $x$ ,  $t$  ve diğer değişkenlerin bir fonksiyonudur.  $E$  elastiklik katsayısıdır,  $I$  ise  $z$  eksenine etrafında eğilmeye zorlanan kirişin alan atalet momentidir. Bu iki ifadenin  $(EI)$  çarpımı ise kirişin eğilmeye olan mukavemetini ifade eder. Kiriş kabulüne göre kiriş, tek boyutlu cisim olarak ifade edilir. Yayılı yükler düzlemde bulunmalı, kiriş düzgün olmalı ve burulma olmamalıdır. Bu tez çalışmasında yapılacak hesaplamalarda hareket denkleminin bu şekli kullanılacak ve bazı durumlarda kirişin kendi sönümü göz ardı edilecektir.

Kirişin hareket denklemini için birçok durumda çözüm bulmak oldukça kolaydır. Asıl zorluk sınır şartlarına göre bir çözüm yöntemi bulmaktır. Bu zorluk verilen ve rastgele yayılı bulunan kiriş sınırlarındaki kuvvetler Fourier açılımı kullanılarak dairesel

periyodik fonksiyonların toplamıyla ifade edilerek aşılabilir. Bu konuda ayrıntılı bilgi sonraki bölümlerde sunulacaktır.

### 3.3. PERİDİNAMİK DİFERANSİYEL METODU

Peridinamik (Peridynamic) kuramı ilk defa Amerika’da bulunan Sandia Ulusal Laboratuvarı’nda araştırmacı olarak görevli Dr. Silling tarafından 2000 yılında öne sürülmüştür yeni ve geleceği olan bir yöntemdir [44]. Peridinamik kuramında, Cauchy’nin yaklaşık 200 sene önce ortaya attığı klasik sürekli ortamlar mekaniğinin hareket denklemleri yeniden formüle edilmiş ve denklemlerin yapısındaki konuma bağlı türevler çıkarılarak yalnızca hacimsel integraller kullanılmıştır (Şekil 3.5.) [48].

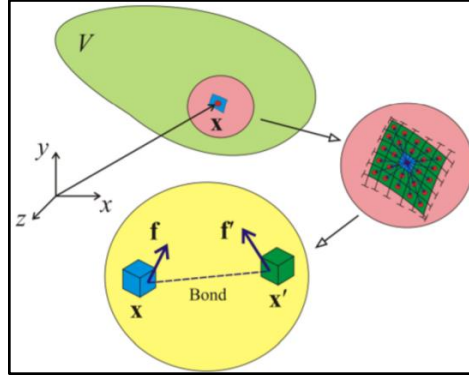
#### Malzeme üzerindeki herhangi bir noktanın hareket denklemleri

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{u} - \mathbf{u}', \mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' + \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \quad \text{Peridinamik Teorisi}$$

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \quad \text{Klasik Teori}$$

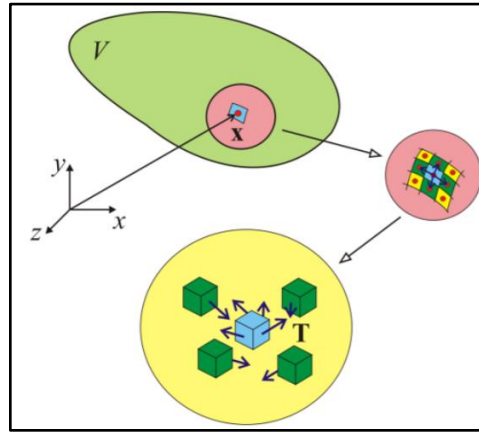
Şekil 3.5. Peridinamik teori ve klasik teorinin karşılaştırılması [48].

Peridinamik sözcüğü Yunanca peri (yakın) ve dinamik (kuvvet) sözcüklerinin birleştirilmesi ile oluşmuştur. Adından da anlaşılacağı gibi bu teoride herhangi bir noktanın ( $x$ ) hareket denklemleri birbirini etkileyen iki noktanın etki ve tepki kuvvetlerinden ( $f$  ve  $f'$ ) meydana gelmektedir (Şekil 4.2) Bu nedenle bu noktaların arasındaki etkileşime bağ (bond) adı verilmektedir [48].



Şekil 3.6. Malzemedeki herhangi bir noktaya etki eden kuvvetlerin Peridinamik teorisinde gösterimi [48].

Hareket denklemindeki integral ifadesi peridinamik teorisini avantajlı hale getirmektedir. Şekil 3.7’de de görüldüğü gibi klasik teori de herhangi bir noktaya etki eden kuvvetler hesaplanırken yalnızca o noktaya en yakın noktalar hesaba katılmaktadır. Peridinamik teorisinde ise kendisine en yakın noktalarla beraber kendinden uzak noktaların etkisi de hesaba katılmaktadır [48].



Şekil 3.7. Klasik sürekli ortamlar mekaniğinde malzemedeki herhangi bir noktaya etki eden kuvvetlerin (T) gösterimi [48].

Peridinamik teorisindeki denklemler yapı bakımından (hacimsel integral) özellikle süreksizlik bulunan ortamlarda; örneğin iki değişik malzeme arasındaki ara yüzeylerde,

hasar, çatlak ve benzeri durumlarda ya da çok etkilerinin analizinde Peridinamik teorisini, klasik yöntemle göre daha avantajlı kılmaktadır [48].

Peridinamik teorisinde skaler alanın içinde hesaplanan her bir  $x$  değerine karşılık gelen  $f=f(x)$  ifadesinde diğer  $x'$  noktaları ile birlikteki etkileşimlerinin etkisi için lokal olmayan gösterim sağlanmaktadır. Saptanan noktalar aile kapsamının içerisinde  $H_x$  veya  $H_{x'}$  ancak etkileşimde bulunurlar. Her bir noktanın birbiri ile etkileşimi birimsiz ağırlık fonksiyonu  $(\omega(|\xi|))$  ile gösterilmektedir. Ailelerin şekli ve büyüklüğü değişiklik gösterebilir, buda lokalsizliğin derecesini vermektedir. Ailelerin büyüklüğü arttıkça lokallik azalırken, azaldıkça da lokallik artmaktadır. Çoğunlukla seçilen  $x$  noktası kendi ailesi içerisinde zaman-uzay alanında asimetric konumdadır. Nedeni şu ki lokalsizlik zaman doğrultusunda geçmişe bağlıdır. Peridinamik türevlendirmenin geçici yokluğunda, iç noktalar ailenin içerisinde simetric bir konumda olmayabilir. Buna karşın ailenin sınırları yakınında seçilen noktalar her zaman asimetrictir [49]. Dolayısıyla Peridinamik Diferansiyel Operatör;

$$\frac{\partial^{P_{1'}+P_{2'}+\dots+P_{M'}} f(x)}{\partial x_{1'}^{P_{1'}} \partial x_{2'}^{P_{2'}} \dots \partial x_{M'}^{P_{M'}}} = \int_{H_{x'}} f(x + \xi) g_N^{P_{1'}P_{2'}\dots P_{M'}}(\xi) dV \quad (3.18)$$

olarak ifade edilmiştir [50]. Burada  $p_i'$  türevin  $x_i'$  değişkenine göre mertebesini ifade etmektedir.  $i=1,\dots,M$  olmak üzere bütün noktalar arasındaki bağıl vektör  $\xi=x''-x$  şeklindedir. Peridinamik fonksiyonlar ortogonal özelliğe sahiptir ve  $g_N^{P_{1'}P_{2'}\dots P_{M'}}(\xi)$  şeklindedir [51].

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{1'}! n_{2'}! \dots n_{M'}!} \int_{H_{x'}} \xi_1^{n_{1'}} \xi_2^{n_{2'}} \dots \xi_M^{n_{M'}} g_N^{P_{1'}P_{2'}\dots P_{M'}}(\xi) dV \\ = \delta_{n_{1'}p_{1'}} \delta_{n_{2'}p_{2'}} \dots \delta_{n_{M'-1}p_{M'-1}} \delta_{n_{M'}p_{M'}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Burada peridinamik fonksiyon  $n=0,\dots,N'$ 'e kadar yeniden düzenlenirse [52];

$$\begin{aligned}
& g_N^{P_1 P_2 \dots P_M}(\xi) \\
&= \sum_{q_1=0}^N \sum_{q_2=0}^N \dots \sum_{q_M=0}^{N-q_1 \dots -q_{M-1}} a_{q_1 q_2 \dots q_M}^{P_1 P_2 \dots P_M} \omega_{q_1 q_2 \dots q_M}(|\xi|) \xi_1^{q_1} \xi_2^{q_2} \dots \xi_M^{q_M}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilmiştir.  $\omega_{q_1 q_2 \dots q_M}(|\xi|)$  ağırlık fonksiyonunu ifade etmektedir ve herbir  $\xi_1^{q_1} \xi_2^{q_2} \dots \xi_M^{q_M}$  terimi polinomsal açılımı göstermektedir. Bilinmeyen  $a_{q_1 q_2 \dots q_M}^{P_1 P_2 \dots P_M}$  terimi ise [49]

$$\sum_{q_1=0}^N \sum_{q_2=0}^N \dots \sum_{q_M=0}^{N-q_1 \dots -q_{M-1}} A_{(n_1 n_2 \dots n_M)(q_1 q_2 \dots q_M)} a_{q_1 q_2 \dots q_M}^{P_1 P_2 \dots P_M} = b_{n_1 n_2 \dots n_M}^{P_1 P_2 \dots P_M} \tag{3.21}$$

çözümü ile ifade edilmiş olur.  $q_i=0, \dots, N$  olmak üzere şekil matrisi ;

$$A_{(n_1 n_2 \dots n_M)(q_1 q_2 \dots q_M)} = \int_{H_x} \omega_{q_1 q_2 \dots q_M}(|\xi|) \xi_1^{n_1+q_1} \xi_2^{n_2+q_2} \dots \xi_M^{n_M+q_M} . dV \tag{3.22}$$

ve

$$b_{n_1 n_2 \dots n_M}^{P_1 P_2 \dots P_M} = n_1! . n_2! \dots n_M! . \delta_{n_1 P_1} \delta_{n_2 P_2} \dots \delta_{n_M P_M} \tag{3.23}$$

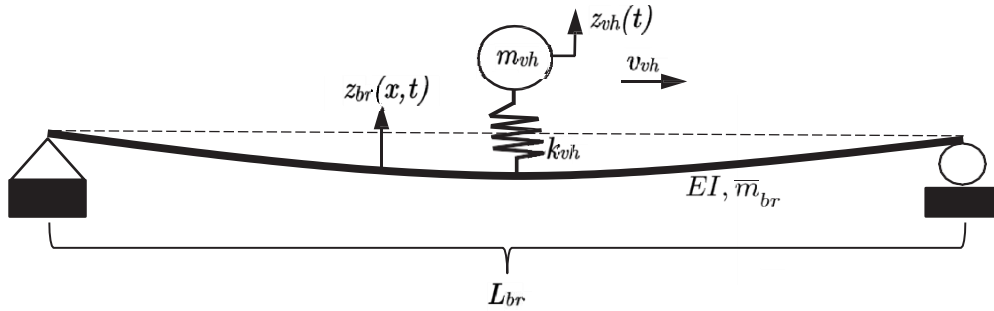
ifadelerinin çözümü ile ifade edilmiş olur. Peridinamik Diferansiyel Operatör ailenin büyüklüğüne bağlı olarak lokal türevlenmeyi içermektedir.  $H_x$  azaldığında  $g_N^{P_1 P_2 \dots P_M}(\xi)$  artmaktadır. Bu durum bize lokalize olmaktan uzaklaşıldığını göstermektedir [49].

## BÖLÜM 4

### SAYISAL DOĞRULAMA VE NÜMERİK ÇÖZÜM

#### 4.1. HAREKETLİ YÜK-KÖPRÜ ETKİLEŞİMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ

Şekil 4.1'de gösterildiği gibi basit bir araç-köprü etkileşimini ele alalım, araç  $v_{vh}$  sabit hızda hareket eder ve bu araç,  $L_{br}$  uzunluğundaki basit bir köprü üzerinde hareket eden bir sertlik yayı  $k_{vh}$  tarafından desteklenen bir yığın kütle olarak modellenir.



Şekil 4.1. Basitçe desteklenen bir köprü üzerinde hareket eden yaylı kütle.

Köprü, sabit kesitli bir Bernoulli Euler kirişi olarak kabul edilir ve hem köprü hem de araç süspansiyonunun sönümlenme etkisi ihmal edilir, bu nedenle kiriş ve yaylı kütle için hareket denklemleri şu şekilde yazılabilir.

$$\bar{m}_{br}\ddot{u} + EIu'''' = f_c(t)\delta(x - v_{vh}t) \quad (4.1)$$

$$m_{vh}\ddot{z}_{vh} + k_{vh}(z_{vh} - u|_{x=v_{vh}t}) = 0 \quad (4.2)$$

$\bar{m}_{br}$  birim uzunluk başına kütle gösterirken,  $EI$  kirişin dış rijitliği,  $u(x, t)$  ve  $z_{vh}$ , sırasıyla kirişin ve yayılan kütleli dikey yer değiştirmelerini gösterir. Burada, kiriş üzerinde hareket eden yaylı kütleli temas noktasında hareket eden konsantre bir kuvveti tanımlayan  $\delta$  Dirac delta fonksiyonu yer almaktadır. Yaylı kütle ile kiriş arasındaki temas kuvveti şu şekilde ifade edilebilir:

$$f_c(t) = k_{vh}(z_{vh} - u|_{x=v_{vh}t}) - m_{vh}g \quad (4.3)$$

Burada  $g$  yerçekimi ivmesidir. Aracın dikey yer değiştirmesinin statik denge konumundan ölçüldüğü kaydedildi. Bu nedenle yay üzerinde elastik kuvvet dışında ek bir kuvvet yoktur. Eşitlik 4.1'in çözümü modal şekiller cinsinden ifade edilecektir,  $\varphi_n(x)$ ; ve ilişkili modal koordinatlar,  $z_{br,n}(t)$ ; şu şekilde ifade edilebilir:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^K z_{br,n}(t)\varphi_n(x) \quad (4.4)$$

Bu çalışmada ele alınan basit mesnetli kiriş için, köprünün modal şekillerinin sinüsoidal tipte olduğu bilinmektedir. Bu nedenle denklem şu şekilde ifade edilebilir:

$$u(x, t) = \sum_n \left( \sin \frac{n\pi x}{L_{br}} z_{br,n}(t) \right) \quad (4.5)$$



$u(x, t)$  yer değiştirmesi için Eşitlik 4.5'in yerine konulması; Eşitlik 4.1'in, her iki tarafını  $\varphi_m(x)$  ile çarparak; ve kirişin uzunluğu  $L_{br}$  üzerinden  $x$  e göre integral alındığında yeni denklem řu şekilde ifade edilebilir:

$$\int_0^{L_{br}} \bar{m}_{br} \varphi_m \sum_{n=1}^K \varphi_n(x) \frac{d^2 z_{br,n}(t)}{dt^2} dx + \int_0^{L_{br}} EI \varphi_m \sum_{n=1}^K z_{br,n}(t) \frac{d^4 \varphi_n(x)}{dx^4} dx = \int_0^{L_{br}} f_c(t) \delta(x - v_{vh}t) \varphi_m dx \quad (4.6)$$

Modal şekiller için ortogonallik koşullarının kullanılması ve  $m$  alt indisinin  $n$  'ye dñnřtürölmesiyle, Eşitlik 4.6 kısaltılarak řu şekilde ifade edilebilir:

$$\ddot{z}_{br,n} + \omega_{br,n}^2 z_{br,n} = \frac{f_c(t) \int_0^{L_{br}} \delta(x - v_{vh}t) \varphi_n(x) dx}{\bar{m}_{br} - \int_0^{L_{br}} \varphi_n^2(x) dx} \quad (4.7)$$

burada  $\omega_{br,n}$  köprünün  $n$  'inci modunun titreşim frekansıdır.

$$\omega_{br,n} = \frac{n^2 \pi^2}{L_{br}^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}_{br}}} \quad (4.8)$$

Ayrıca, Eşitlik 4.8'in sağ tarafının manipölasyonu yoluyla köprünün  $n$ . modal denklemini aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\ddot{z}_{br,n} + \omega_{br,n}^2 z_{br,n} + \frac{2\omega_{vh}^2 m_{vh}}{\bar{m}_{br} L_{br}} \sin \frac{n\pi v_{vh}t}{L_{br}} \sum_k \left( \sin \frac{k\pi v_{vh}t}{L_{br}} z_{br,k} \right) - \left( \frac{2\omega_{vh}^2 m_{vh}}{\bar{m}_{br} L_{br}} \sin \frac{n\pi v_{vh}t}{L_{br}} \right) z_{vh} = - \frac{2m_{vh}g}{\bar{m}_{br} L_{br}} \sin \frac{n\pi v_{vh}t}{L_{br}} \quad (4.9)$$

Benzer şekilde, Eşitlik 4.2 yeniden yazılabilir:

$$\ddot{z}_{vh} + \omega_{vh}^2 z_{vh} = \omega_{vh}^2 \sum_n^K \sin \frac{n\pi v_{vh} t}{L_{br}} z_{br,n} \quad (4.10)$$

Burada  $\omega_{vh}$  aracın titreşim frekansdır.

$$\omega_{vh} = \sqrt{\frac{k_{vh}}{m_{vh}}} \quad (4.11)$$

Araç kütlesi  $m_{vh}$ 'nin köprü kütlesi  $\bar{m}_{br}$ 'den çok daha az olduğu varsayımıyla Eşitlik 4.9 aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\ddot{z}_{br,n} + \omega_{br}^2 z_{br,n} = -\frac{2m_{vh}g}{\bar{m}_{br}L_{br}} \sin \frac{n\pi v_{vh} t}{L_{br}} \quad (4.12)$$

Sıfır başlangıç koşulları kullanılarak ışının genelleştirilmiş koordinatı Eşitlik 4.12'den elde edilerek aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$z_{br} = \frac{\delta_{st}}{1 - R^2} \left[ \sin \left( \frac{\pi v_{vh} t}{L_{br}} \right) - R \sin(\omega_{br} t) \right] \quad (4.13)$$

burada  $\delta_{st}$ ,  $m_{vh}$  kütlesinin aynı noktadaki yerçekimi etkisi altında kirişin orta açıklığının yaklaşık olarak statik saptmasını gösterir:

$$\delta_{st} = -\frac{2m_{vh}gL_{br}^3}{\pi_4 EI} \quad (4.14)$$

Hız parametresi  $R$ , sürüş frekansının yarısının oranı olarak tanımlanır;

$$R = \frac{\pi v_{vh}}{L \omega_{br}} \quad (4.15)$$

Tekli mod için Eşitlik 4.10'da köprü koordinatı  $z_{br}$  için Eşitlik 4.13'de yerine koyarak, Eşitlik 4.10'dan araç yanıtı  $z_{vh}$  yi Duhamel integrali ile şu şekilde çözebiliriz:

$$z_{vh}(t) = \frac{\omega_{vh} \delta_{st}}{2(1-R^2)} \left[ \frac{1}{\omega_{vh}} (1 - \cos(\omega_{vh}t)) \right. \\ \left. - \frac{\omega_{vh} \left( \cos\left(\left(\frac{2\pi v_{vh}t}{L}\right)\right) - \cos(\omega_{vh}t) \right)}{\omega_{vh}^2 - \left(\frac{2\pi v_{vh}}{L_{br}}\right)^2} \right. \\ \left. - R \frac{\omega_{vh} \left( \cos\left(\left(\frac{\pi v_{vh}}{L_{br}} - \omega_{br}\right)t\right) - \cos(\omega_{vh}t) \right)}{\omega_{vh}^2 - \left(\frac{\pi v_{vh}}{L_{br}} - \omega_{br}\right)^2} \right] \quad (4.16)$$

“ $\mu$ ” nün köprünün araca olan frekans oranını ifade ettiğini düşünürsek ve Eşitlik 4.15'de tanımlanan hız parametresini kullanarak önceki denklem şu şekilde yeniden ifade edilebilir:

$$z_{vh}(t) = \frac{\delta_{st}}{2(1-R^2)} \left[ (1 - \cos \omega_{vh}t) - \frac{\cos\left(\frac{2\pi v_{vh}t}{L_{br}}\right) - \cos \omega_{vh}t}{1 - (2\mu R)^2} \right. \\ \left. - R \frac{\cos(\omega_{br} - \pi v_{vh}/L_{br})t - \cos \omega_{vh}t}{1 - \mu^2(1-R)^2} \right. \\ \left. + R \frac{\cos(\omega_{br} + \pi v_{vh}/L_{br})t - \cos \omega_{vh}t}{1 - \mu^2(1+R)^2} \right] \quad (4.17)$$

aracın hızını elde etmek için şu şekilde değiştirebiliriz:

$$\dot{z}_{vh}(t) = \frac{\delta_{st}\omega_{vh}}{2(1-R^2)} \left[ \sin \omega_{vh}t + \frac{2\mu R \sin\left(\frac{2\pi v_{vh}t}{L_{br}}\right) - \sin \omega_{vh}t}{1 - (2\mu R)^2} \right. \\ \left. + R \frac{\mu(1-R) \cdot \sin(\omega_{br} - (\pi v_{vh}/L_{br}))t - \sin \omega_{vh}t}{1 - \mu^2(1-R)^2} \right. \\ \left. - R \frac{\mu(1+R) \sin(\omega_{br} + (\pi v_{vh}/L_{br}))t - \sin \omega_{vh}t}{1 - \mu^2(1+R)^2} \right] \quad (4.18)$$

## 4.2. AYRIKLAŞTIRMA

PDO'nün kullanımı sayısal entegrasyon gerektirir. Bu nedenle entegrasyon, basitliği nedeniyle ağırsız bir şema kullanılarak gerçekleştirilir. Etki alanı, her biri belirli bir varlığa sahip bir dizi düğüm toplama noktasına ayrılmıştır. Etki alanı, her biri belirli bir varlığa sahip sonlu sayıda toplama noktasına ayrıklaştırılır. Ayrıklaştırma tek biçimli veya tek biçimsiz olabilir. Belirli bir nokta ile ilişkili olarak entegrasyon, her aile içindeki varlıkların toplamını içerir.

Alan denklemleri ve sınır koşulları/başlangıç koşullarının ayrıklaştırılmasından önce, her bir eş dizim noktasının ailesi oluşturulur ve aile üyeleriyle etkileşim derecesi (ağırlık fonksiyonu) belirlenir. Ailenin büyüklüğü, hesaplama yeterliliğine dayalı olarak belirlenebilir; ancak, alan denkleminin yerel olmayan özelliklerini yakalaması gerekir.

Ayrıca, her nokta, PD işlevlerinin oluşturulmasını gerektirir,  $g_N^{P_1 P_2 \dots P_N}(x - x')$  Bu

işlevler, aile noktalarının, aile boyutunun ve ağırlık fonksiyonunun belirli bir dağılımı ile her bir nokta için benzersizdir.

Denklemlerin ayrıklaştırılmış biçiminde, Eşitlik 4.19'daki aile (ufuk) üzerindeki entegrasyon şu şekilde sağlanır:

$$\int_{H_x} f(x + \xi) g_N^{p_1 p_2 \dots p_M}(\xi) dV = \sum_{j=1} f(x_{(j)}) g_N^{p_1 p_2 \dots p_M}(x_{(j)} - x) V_{(j)} \quad (4.19)$$

Burada  $V_{(j)}$ , her bir PD noktasının  $x_{(j)}$  küçük artımlı varlığını temsil eder. Toplam,  $x$  noktasındaki PD ailesiyle birlikte  $x_{(j)}$  nin her noktadaki katkılarını içerir. Gauss kareleme tekniğinde ağırlık için birlik elde etmek için entegrasyon noktaları her zaman varlığının merkezinde bulunur. Diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılmış hali şu şekilde ifade edilebilir:

$$F(u) - b = 0 \quad (4.20)$$

Burada  $u$  vektörü, her entegrasyon noktasında bilinmeyen alan değişkenini içerir ve  $F$  matrisi, diferansiyel operatörlerin uygulanmasından kaynaklanan katsayıları temsil eder.  $b$  vektörü, diferansiyel denklemlerdeki bilinen terimleri temsil eder. Diferansiyel denklemlerle ilişkili sınır ve/veya başlangıç koşulları, aşağıdaki gibi bir dizi kısıt denklemleri olarak ayrıklaştırılabilir:

$$G(u) - d = 0 \quad (4.21)$$

Burada bilinen matris  $G$ , bilinmeyen vektör  $u$  ile bağlantılı kısıtlama denklemlerinin katsayılarını içerir ve  $d$  vektörü, uygulanan bilinen kısıtlama denklemleri terimlerini içerir. Lagrange çarpanlarının tanıtılmasıyla,  $\lambda$ , diferansiyel denklemlerin ve limit denklemlerinin ayrıklaştırılmış biçimi, varyasyon analizi kavramı kullanılarak aşağıdaki gibi birleştirilebilir:

$$\delta u^T (F(u) - b) + \delta [\lambda^T (G(u) - d)] = 0 \quad (4.22)$$

burada  $\delta u$ , bilinmeyen vektör  $u$ 'nun keyfi varyasyonunu temsil eder. Denklem 4.22 deki ikinci terimin ilk varyasyonu genişletilirse;

$$\delta u^T (F(u) - b) + \delta \lambda^T (G(u) - d) + \delta u^T \frac{\partial G(u)}{\partial u^T} \lambda = 0 \quad (4.23)$$

$\delta u$  ve  $\delta \lambda$ 'nın keyfi varyasyonları için, Eşitlik 4.24

$$F(u) - b + \frac{\partial G(u)}{\partial u^T} \lambda = 0 \quad (4.24)$$

Ve

$$G(u) - d = 0 \quad (4.25)$$

Artık vektör  $R$ 'yi aşağıdaki gibi tanımladıktan sonra

$$R(u, \lambda; b, d) = \begin{pmatrix} F(u) - b + \frac{\partial G(u)}{\partial u^T} \lambda \\ G(u) - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Taylor'ın seri açılımı şu şekilde ifade edilebilir:

$$R(u + \Delta u, \lambda + \Delta \lambda; b + \Delta b, d + \Delta d) = R(u, \lambda; b, d) + \frac{\partial R}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial R}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial R}{\partial d} \Delta d + HOT \quad (4.27)$$

$\Delta u$  ve  $\Delta \lambda$  'nın daha yüksek dereceli terimleri HOT dikkate alınmadan, artımlı artık vektör  $\Delta R$  şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\Delta R &= R(u + \Delta u, \lambda + \Delta \lambda; b + \Delta b, d + \Delta d) - R(u, \lambda; b, d) \\ &= \frac{\partial R}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial R}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial R}{\partial d} \Delta d = 0\end{aligned}\quad (4.28)$$

Eşitlik 4.26'dan değiştirildikten sonra, bu denklem şu şekilde yeniden düzenlenebilir:

$$\Delta R = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(u)}{\partial u} \Delta u - \Delta b + \lambda^T \frac{\partial^2 G(u)}{\partial u^2} \Delta u + \frac{\partial G(u)}{\partial u^T} \Delta \lambda \\ \frac{\partial G(u)}{\partial u} \Delta u - \Delta d \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\quad (4.29)$$

Dolayısıyla, artan denklemlerin yönetim sistemi şu şekilde elde edilir:

$$\Delta R = H \Delta v - \Delta f = 0\quad (4.30)$$

burada

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(u)}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial^2 G(u)}{\partial u^2} & \frac{\partial G(u)}{\partial u^T} \\ \frac{\partial G(u)}{\partial u} & 0 \end{bmatrix}\quad (4.31)$$

$$\Delta v = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}\quad (4.32)$$

ve

$$\Delta f = \begin{Bmatrix} \Delta b \\ \Delta d \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

burada  $b, d$  ve  $\Delta b$  bilinen vektörle,  $\Delta u$  ve  $\Delta \lambda$  bilinmeyen vektörlerdir. Sayısal bir uygulamada, Denklem 4.30'u bir adımda kullanarak Denklem 4.26'nın tatmini, doğrusallaştırma nedeniyle pratik değildir. Bu nedenle, çözüm özyinelemeli bir form aracılığıyla Newton-Raphson yöntemi kullanılarak yinelemeli olarak elde edilir:

$$H^{(n)} \Delta v^{(n+1)} = \Delta f - R(v^n; f) \quad (4.34)$$

$R(v^n; f)=0$  ve  $v^{(n+1)} = v^{(n)} + \Delta v^{(n+1)}$  ile birlikte.

Lineer diferansiyel denklemler ve sınır/başlangıç koşulları için, bunların peridinamik ayrıklaştırılması lineer bir cebirsel denklemler kümesine yol açar:

$$F(u) = Lu \quad (4.35)$$

ve

$$G(u) = cu \quad (4.36)$$

Eşitlik 4.24 ve Eşitlik 4.25'e göre, sonuçta ortaya çıkan yöneten Eşitlik 4.26 şu hale gelir:

$$Lu - b + c^T \lambda = 0 \quad (4.37)$$

ve

$$c - d = 0 \quad (4.38)$$

bu denklemler şu şekilde yeniden biçimlendirilebilir:



$$\begin{Bmatrix} L & c^T \\ c & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

### 4.3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

#### 4.3.1. Araç ve Köprü İçin Hareket Denklemleri

Yaylı kütle birimleri, geleneksel köprü elemanları ile modellenmiştir. Ancak araçlarla doğrudan temas halinde olan diğer parçalar için bunun yerine yaylı kütle birimlerinin etkilerini dikkate alan etkileşim elemanlarının kullanılması gerekmektedir. Bu çalışmada, [ ] gösterimi kare matris, { } sütun vektörü ve < > satır vektörü için kullanılır[53].

Şekil 4.1'de gösterilen araç modeli, bu bölüm boyunca büyük ölçüde yaylı kütle modeline atıfta bulunulacaktır. Süspansiyon ünitesinin rijitlik katsayısı  $k_v$  ile, araç gövdesinden alınan kütle  $m_{vh}$  olarak gösterilsin. Yaylı kütle modeli, iki yoğun kütleli her biri ile ilişkili bir düğüm ile iki düğümlü bir sistem olarak kabul edilir. Ayrıca, statik denge konumlarından ölçülen iki düğümün dikey yer değiştirmelerinin  $\{z\}^T = \langle z_1, z_2 \rangle$  koordinatlarıyla gösterilsin. Düğüme karşılık gelen  $\{z\}^T$  yer değiştirmeleri  $\{p_v\}^T = \langle p, 0 \rangle$ , dış kuvvetlerdir, burada  $p$  iki kütleli toplam ağırlığını temsil eder,  $p = -(M_v + m_w)g$ ,  $g$  yerçekimi ivmesini gösterir[53].

Şekilde gösterilen yaylı kütle modeli için hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m_{vh}\ddot{z}_{vh} + k_{vh}z_{vh} = p + f_c \quad (4.40)$$

Burada  $f_c$ , tekerlek kütlesi ile köprü elemanı arasında var olan etkileşim veya temas kuvvetidir.  $x_c$ , yayılan kütle biriminin hareket eden konumunu gösterebilir (bkz. Şekil 4.1) ve  $\{N_c\}$ ,  $x_c$  temas noktasında değerlendirilen kirişin dikey yer değiştirmesi için kübik Hermityen interpolasyon fonksiyonlarını içeren bir vektör, yani  $\{N_c\} = \{N(x_c)\}$ . Temas kuvveti  $f_c$  şu şekilde ifade edilebilir:

$$f_c = k_B(\{N_c\}\{u_b\} + r_c - z_1) \geq 0 \quad (4.41)$$

AKE sisteminin tekerleklerin köprüden ayrılma olasılığından dolayı  $f_c \geq 0$  koşulu uygulanır,  $k_B$  balast sertliği,  $\{u\}$  kiriş elemanının düğüm yer değiştirmeleri ve  $r_c$  ray düzensizliğinin yüksekliğidir, eleman boyunca bilindiği varsayılan  $x_c$  temas noktasında ele alınır.  $\{N_c\}$  enterpolasyon fonksiyon vektörünün, elemanın düşey yer değiştirmelerle ilgili bu SD (Serbestlik Derecesi)'leri için yalnızca dört sıfır olmayan giriş içerdiğine, düşey yer değiştirmelerle ilgili olmayan diğer girişlerin basitçe sıfıra ayarlandığına dikkat edin[53].

Yaylı kütle birimi ile temas halinde olan köprü elemanının hareket denklemleri şu şekilde yazılabilir:

$$[\bar{m}_{br}]\{\ddot{u}\} + [k_b]\{u\} = \{p_b\} - \{N_c\}f_c \quad (4.42)$$

burada  $[\bar{m}_{br}]$  ve  $[k_b]$ , köprü elemanının kütle rijitlik matrislerini gösterir; ve  $\{p_b\}$ , elemana etki eden dış düğüm yüklerini belirtir. Üç boyutlu katı kiriş elemanı olarak

köprü elemanı ile ilgili olarak, elemanın her bir düğümüne, üçü öteleme ve diğer üçü rotasyonlar için olmak üzere altı SD atanabilir. Bu çalışmada, köprü için Rayleigh sönümü varsayılmıştır; bu, tüm köprünün sönüm matrisinin, prosedürün yapının kütle ve rijitlik matrislerinin doğrusal bir kombinasyonu olarak hesaplanabileceği anlamına gelir [53].

Eşitlik 4.40 ve Eşitlik 4.42’de görülebileceği gibi, yaylı kütle birimi ve köprü elemanı, hem zamanın hem de konumun bir fonksiyonu olarak değişen temas kuvveti  $f_c$  aracılığıyla birbirleriyle etkileşir. Yaylı kütle biriminin köprü elemanı ile tam temas halinde olmasını sağlamak için, köprü elemanı tarafından yaylı kütle birimine uygulanan reaktif kuvvet sıfırdan büyük olmalıdır. Temas kuvveti  $f_c$  sıfırdan küçük olduğunda, tekerlek kütlesi yukarı sıçrayacaktır, bu da yaylı kütle birimi ile köprü arasındaki temas koşulunun ihlal edildiği anlamına gelir. Bu bölümde, hareketli araçların köprüden ayrılması için herhangi bir değerlendirme yapılmayacaktır. Eşitlik 4.40’ın ilk satırından, ikinci satırla birlikte temas kuvveti  $f_c$  aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$f_c = -p + m_w \ddot{z}_1 + M_v \ddot{z}_2 \quad (4.43)$$

Eşitlik 4.42 ve 4.43'e göre kiriş elemanının dinamik tepkisinin sadece  $p$  statik ağırlığından değil, aynı zamanda dikey yönde hareket eden araçların atalet etkilerinden de etkilendiği görülebilir[53].

### 4.3.2. Artımlı Formda Eleman Denklemleri

Eşitlik 4.40 ve Eşitlik 4.42’de verilen sistem denklemleri, iki alt sistem, yani hareket eden araç ve devam eden köprü arasındaki temas kuvveti  $f_c$ 'nin varlığından dolayı, bağlantılıdır, doğrusal değildir ve doğası gereği zamana bağlıdır. Bu bölümde, dengelenmemiş kuvvetleri ortadan kaldırmak için her bir artımlı adımda gerçekleştirilen yinelemelerle, hareket sistem denklemlerini çözmek için artımlı bir yöntem sunulacaktır.

Sistem için  $t$  zamanından  $t + \Delta t$  ye kadar tipik bir artımlı adım düşünün. Eşitlik 4.40 ve Eşitlik 4.42'de sunulan bileşen denklemleri, sistemin  $t + \Delta t$  zamanında deforme olmuş konumu için oluşturulan denklemler olarak yorumlanmalıdır [53].

$$\{z\}_{t+\Delta t} = \{z\}_t + \{\Delta z\} \quad (4.44)$$

burada  $\{\Delta z\}$ , ele alınan zaman adımı sırasında meydana gelen yaylı kütle biriminin yer değiştirme artışlarını gösterir. Eşitlik 4.41'i kullanarak, yaylı kütle eşitliği (Eşitlik 4.40) artımlı biçimde şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} [m_{vh}]\{\ddot{z}_{vh}\}_t + \Delta t + [k_{vh}]\{\Delta z_{vh}\}_{t+\Delta t} \\ = p + k_B(\langle N_c \rangle \{u_b\} + r_c)_{t+\Delta t} - q_{s1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

burada  $\{q_s\}_t$ , son artımlı adımın sonunda, yani  $t$  zamanında hesaplanan yaylı kütle biriminin iç direnç kuvvetlerini gösterir,

$$q_{s1} = (k_{vh} + k_b)z_{vh} \quad (4.46)$$

Eşitlik 4.45'in sağ tarafında görünen direnç kuvvetleri  $\{q_s\}_t$  ve ray düzensizlikleri  $r_{c,t+\Delta t}$  mevcut artan adımın başlangıcında bilinmelidir. Ancak, köprü yer değiştirmeleri  $\{u_b\}_{t+\Delta t}$  bilinmemektedir. Araç denklemleri, aşağıda gösterilecek olan köprü denklemleri ile birleştirilmiştir. Benzer şekilde, mevcut zaman adımında köprü yer değiştirmeleri için aşağıdakiler yazılabilir:

$$\{u_b\}_{t+\Delta t} = \{u_b\}_t + \{\Delta u_b\} \quad (4.47)$$

burada  $\{\Delta u_b\}$ , mevcut artımlı adım sırasında köprü elemanının yer değiştirme artışlarını gösterir. Eşitlik 4.41 ve Eşitlik 4.47 kullanılarak, Eşitlik 4.42'de verilen köprü hareket denklemleri artımlı biçimde yeniden yazılabilir,

$$[\bar{m}_{br}]\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [[k_b] + k_B\{N_c\}\langle N_c \rangle]\{\Delta u_b\} \quad (4.48)$$

$$= \{Pb\}_{t+\Delta t} - \{N_c\}k_B(r_c - z_1)_{t+\Delta t} - [[k_b] + k_B\{N_c\}\langle N_c \rangle]\{u_b\}_t$$

Dış yükler  $\{Pb\}_{t+\Delta t}$  ve düzensizlik fonksiyonu  $r_{c,t+\Delta t}$  gibi eşittir işaretinin sağ tarafındaki tüm terimlerin verildiği veya son zaman adımında kullanıma sunulduğu durumlarda, tekerlek kütle yer değiştirmesi  $z_{1,t+\Delta t}$  hariç, köprü yer değiştirmeleri  $\{u_b\}_t$  olarak ifade edilir. Bu da yine köprü ve hareketli araç arasındaki başka bir bağlantı kaynağını temsil eder[53].

### 4.3.3. Araçlar için Eşdeğer Rijitlik Denklemi

Yaylı kütle birimi ve köprü elemanı için Eşitlik 4.45 ve Eşitlik 4.48'den görülebileceği gibi, iki sistem denklemi, birbirlerinin çözümüne bağlı olduklarından kuplajlıdır. Aşağıda, yaylı kütle eşitliği (Eşitlik 4.45) ilk olarak Newmark'ın tek adımlı sonlu fark şeması kullanılarak eşdeğer bir rijitlik eşitliğine dönüştürülecektir. Eşdeğer sertlik eşitliğinden, yaylı kütle biriminin yer değiştirmeleri çözülebilir ve daha sonra köprü eşitliklerine ikame edilebilir. Bunu yaparak, araç SD'leri ortadan kaldırılabilir ve temas halindeki köprü elemanınınkilere yoğunlaştırılabilir. Newmark'ın sabit ortalama ivmeli, yani koşulsuz kararlılığı için  $\beta = 0.25$  ve  $\gamma = 0.5$  olan  $\beta$  yöntemine dayanarak

$$\begin{aligned}
\{\dot{z}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{z}\}_t + \{(1 - \gamma)\{\ddot{z}\}_t + \gamma\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t}\}\Delta t \\
\{z\}_{t+\Delta t} &= \{z\}_t + \{\dot{z}\}_t\Delta t + \{(0.5 - \beta)\{\ddot{z}\}_t + \beta\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t}\}\Delta t^2
\end{aligned}
\tag{4.49}$$

$t + \Delta t$  anında aracın ivme ve hızlarının çözülebildiği,

$$\begin{aligned}
\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t} &= a_0\{\Delta z\} - a_2\{\dot{z}\}_t - a_3\{\ddot{z}\}_t \\
\{\dot{z}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{z}\}_t + a_6\{\ddot{z}\}_t + a_7\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t}
\end{aligned}
\tag{4.50}$$

katsayılar ve daha sonra görünecek olanlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}, \\
a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1, \quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\gamma}{\beta} - 2 \right), \\
a_6 &= \Delta t(1 - \gamma), \quad a_7 = \gamma\Delta t
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

Araç ivmeleri ve hızları için Eşitlik 4.50'de verilen ilişkilerle, yaylı kütle eşitliği (Eşitlik 4.45), eşdeğer bir rijitlik eşitliği verecek şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
(k_{vh} + k_b + a_0 m_{vh})\Delta z_{vh} \\
= (p + k_b r_c + k_b \langle N_c \rangle \{u_b\})_{t+\Delta t} - q_{s1_t} + q_{e1_t}
\end{aligned}
\tag{4.52}$$

Burada:

$$q_{e1,t} = -m_{vh}(a_2 \dot{z}_{vh} + a_3 \ddot{z}_{vh})
\tag{4.53}$$

Eşitlik 4.52'nin eşittir işaretinin sağ tarafındaki tüm terimler, köprü yer değiştirmeleri hariç, son artımlı adımın sonunda verilmiştir veya zaten bilinmektedir. Buna göre, yaylı kütle biriminin  $\{\Delta z\}$  yer değiştirme artışları Eşitlik 4.52'den çözülebilir ve köprü yer değiştirmeleri  $\{u_b\}_{t+\Delta t}$  ile şu şekilde ilişkilendirilebilir:

$$\Delta z_{vh} = -\frac{1}{D}(k_v + a_0 M_v)(p + k_B r_{c,t+\Delta t} + k_B \langle N_c \rangle \{u_b\}_{t+\Delta t}) - \frac{1}{D}(q_{s1,t} + q_{e1,t})a_0 m_{vh} + (\tilde{q}_{s,t} + \tilde{q}_{e,t})(k_v) \quad (4.54)$$

D, Eşitlik 4.52'deki araç denklemlerinin determinantını temsil eder,

$$D = k_v + k_B + a_0 m_w \quad (4.55)$$

Ve

$$\tilde{q}_{e,t} = (q_{e1} + q_{e2})_t \quad (4.56)$$

$$\tilde{q}_{s,t} = (q_{s1} + q_{s2})_t = k_B z_{vh,t}$$

Eşitlik 4.54, yaylı kütle SD'lerini köprü SD'lerine yoğunlaştırmak için efendi-köle ilişkisini temsil eder. Yang ve Lin tarafından kullanılan yaklaşık efendi-köle ilişkisi ile karşılaştırıldığında, Eşitlik 4.54'deki mevcut ilişki basit, doğru ve açık olma avantajına sahiptir. Eşitlik 4.54, Newmark tipinin sonlu fark formüllerinin tanıtılmasıyla türetildiğinden, tüm araç köprüsü etkileşim sistemi için denklemlerin çözümünde ima edilenle aynı doğruluk sırasına sahiptir ve bu da Newmark's  $\beta$  yöntemi ile çözülecektir. Bu nedenle, aşağıda türetilen AKE ögesinin doğruluğu ve yakınsama özellikleri hiçbir zorluk olmadan temin edilebilir [53].

#### 4.3.4. Araç-Köprü Etkileşim Elemanı

$z_{1,t+\Delta t} = z_{1,t} + \Delta z_1$  olduğu bilinmektedir ve  $\Delta z_1$  için eşitlik 4.54'ün ilk satırı kullanılarak,  $t + \Delta t$  zamanında kiriş elemanı için yoğunlaştırılmış hareket eşitlikleri Eşitlik 4.48'den yaylı kütle biriminin etkileşim etkisi ile türetilir,

$$\begin{aligned} & [\bar{m}_{br}] \{\ddot{u}_{br}\}_t + \Delta t + [\hat{k}_b] \{\Delta u_{br}\} \\ & = (\{p_b\}_{t+\Delta t} + \{p_w\}_{t+\Delta t}) - (\{f_s\}_t + [\hat{k}_b] \{u_{br}\}_t), \end{aligned} \quad (4.57)$$

burada  $[\hat{k}_b]$ , yoğunlaştırılmış sistem için rijitlik matrisidir,

$$[\hat{k}_b] = [k_b] + k_B \frac{a_0}{D} [m_{vh} k_{vh} + a_0 m_{vh}] \{N_c\} \langle N_c \rangle \quad (4.58)$$

$\{p_w\}_{t+\Delta t}$  ray düzensizliklerinden ve balast sertliğinden gelen katkılar dahil olmak üzere tekerlekler tarafından indüklenen yük hareketlerini belirtir,

$$= -k_B \left[ r_{c,t+\Delta t} - (p + k_B r_{c,t+\Delta t}) \frac{1}{D} (k_v + a_0 m_{vh}) \right] \{N_c\} \quad (4.59)$$

ve  $\{f_s\}_t$  yaylı kütle birimi ile ilişkili direnç kuvvetlerini belirtir,



$$\{f_s\}_t = k_B \left[ \frac{1}{D} (q_{s1,t} + q_{e1,t}) a_0 m_{vh} \right. \\ \left. + (\tilde{q}_{s,t} + \tilde{q}_{e,t}) (k_{vh}) - z_{1,t} \right] \{N_c\} \quad (4.60)$$

Eşitlik 4.57'de  $[\hat{k}]\{u_b\}_t$  terimi, köprü elemanının son zaman adımında uyguladığı direnç kuvvetleri olarak yorumlanmalıdır [53].

Eşitlik 4.58'de verilen yoğunlaştırılmış sertlik matrisi  $[\hat{k}]$  esasen iki ana parça içerir.  $[k_b]$  matrisi, köprü elemanının kendisinden kaynaklanan etkileşimsiz kısmı temsil eder. Eşitlik 4.58'deki geri kalan, yükleme konumu  $x_c$  nin bir fonksiyonu olan hareketli yaylı kütle tarafından indüklenen etkileşim kısmını temsil eder ve bu nedenle şekil fonksiyonu  $\{N_c\}$  tarafından ima edildiği gibi zamana bağlıdır. Bir zaman tanım alanı analizinde, her bir artımlı adımda yalnızca ikinci (etkileşim) kısım güncellenmelidir. Rijitlik matrisinin bu kısmını tüm artan adımlar boyunca değişmeden tutmak ve yaylı kütle birimlerinin hareket konumlarının her bir zaman adımının yalnızca ikinci kısmını güncellemek için en uygun yol, hareketli araç olmayan köprü için olduğu gibi  $[k_b]$  matrislerini bir araya getirmektir. Eşitlik 4.57'de verilen denklemler, araç-köprü etkileşimi (AKE) elemanı için tam olarak hareket denklemlerini temsil eder. Böyle bir elemanı kullanarak, bir kiriş elemanına sadece bir yaylı kütle biriminin etki etmesine izin verilir. Her eleman için izin verilen maksimum uzunluk, herhangi iki tekerlek grubu arasındaki minimum boşluktan daha büyük olmamalıdır. Yukarıdaki prosedür, tek bir kiriş elemanı üzerinde aynı anda hareket eden iki veya daha fazla yaylı kütle birimi durumunu içerecek şekilde genelleştirilmişse, böyle bir kısıtlama kaldırılabilir. Hareketli yüklerin özel durumunu, yani hareket eden araçların atalet etkisinin ihmal edildiğini düşünün.  $k_v = 0, m_{vh} = 0$  bırakarak, Eşitlik 4.55'den  $D = a_0 M_v k_B$  olarak determinant, Eşitlik 4.46'dan direnç kuvveti  $q_{s1,t} = k_B z_{1,t}$  ve Eşitlik 4.53'den yaylı kütle kuvveti  $q_{e1,t} = 0$ . Ayrıca, Eşitlik 4.58 ve Eşitlik 4.60'dan aşağıdakiler elde edilebilir:  $[\hat{k}] = [k_b]$ ,  $\{p_s\}_{t+\Delta t} = p\{N_c\}$  ve

$\{f_s\}_t = \{0\}$  Sonuç olarak, Eşitlik 4.57'de verilen yoğun denklem aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} & [\bar{m}_{br}] \{\ddot{u}_{br}\}_{t+\Delta t} + [k_b] \{\Delta u_{br}\} \\ & = \{p_b\}_{t+\Delta t} + p\{N_c\} - [k_b] \{u_{br}\}_t \end{aligned} \quad (4.61)$$

Burada  $p\{N_c\}$  terimi, tutarlı düğüm yükleri kavramına göre beklenebileceği gibi, hareketli yükün hareketini belirtir. Öte yandan, sönümleme katsayısını  $c_v$  ve tekerlek takımının kütlesi  $m_w$  sıfıra eşitlenerek ve aracın ve balastın rijitliklerine, yani  $k_v$  ve  $k_B$  ye çok büyük bir sayı atanarak, hareketli kütleye ulaşılabilir [53].

Yukarıda türetilen AKE elemanı, eleman matrislerinde simetri ve bantlılık özelliklerini korurken, ana eleman ile tam olarak aynı sayıda SD'ye sahip olduğundan, tüm eleman denklemlerinin ve ilgili değişkenlerin aynı global koordinatlara dönüştürülmesi yoluyla, yapının her düğüm noktasındaki denge ve uyumluluk koşullarını hesaba katan geleneksel eleman montaj prosedürü, hareket denklemlerini oluşturmak için tüm araç köprü sistemlerine uygulanabilir. Yani, Eşitlik 4.57 ile temsil edilen tüm AKE elemanları ve hareketli araçlarla temas halinde olmayan elemanlar üzerinden döngü yapılarak, yapı için hareket denklemleri aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$[M_{br}] \{\ddot{U}_{br}\}_{t+\Delta t} + [K_b] \{\Delta U_b\}_{t+\Delta t} = \{P_b\}_{t+\Delta t} - \{F_b\}_t \quad (4.62)$$

burada  $\{U_b\}_{t+\Delta t}$  zamanında köprünün toplam yer değiştirmelerini  $t + \Delta t$  ve  $\{\Delta U_b\}$   $t$  zamanından  $t + \Delta t$  ye kadar köprünün yer değiştirme artışlarını gösterir,

$$\{U_{br}\}_{t+\Delta t} = \{U_{br}\}_t + \{\Delta U_{br}\} \quad (4.63)$$

Sistem eşitlikliğinde (Eşitlik 4.62), terimlerin her biri, köprünün yoğunlaştırılmış olanlar da dahil olmak üzere giriş elemanlarının tüm karşılık gelen terimleri üzerinde döngü yapılarak birleştirilmiştir. Bu nedenle, hem AKE elemanlarının hem de ana elemanların katkılarının tekerlek yükleri tarafından doğrudan etkilenmediği göz önüne alındığında,  $[M_b]$  kütle matrisi ve  $[K_b]$  köprünün rijitlik matrisi olarak yorumlanmalıdır. Eşitlik 4.62'nin sağ tarafındaki dış yükler  $\{P_b\}_{t+\Delta t}$  ve direnç kuvvetleri  $\{F_b\}_t$  aşağıdaki gibi oluşturulmuştur:

$$\{P_b\}_{t+\Delta t} = \sum_{elm=1}^{n.o.e} (\{p_b\}_{t+\Delta t} + \{p_w\}_{t+\Delta t}) \quad (4.64a)$$

$$\{F_b\}_t = \sum_{elm=1}^{n.o.e} (\{f_s\}_t + [\hat{k}_b]\{u_b\}_t) \quad (4.64b)$$

#### 4.3.5. Yinelemelerle Artımlı Dinamik Analiz

Newmark'ın  $\beta$  yöntemiyle, sistem eşitliği (Eşitlik 4.62), tipik bir zaman adımı için köprünün yer değiştirme  $\{\Delta U_b\}$  çözülebildiği bir dizi eşdeğer sertlik denklemine dönüştürülebilir. Böyle bir prosedür tekrarlanarak toplam köprü ve araç tepkileri de hesaplanabilir. Artımlı yaklaşımın doğruluğu, aşağıda sunulacak yinelemeli bir prosedürün dahil edilmesiyle arttırılabilir [53].

#### 4.3.6. AKE Sistemi için Eşdeğer Sertlik Denklemleri

Her şeyden önce, köprünün  $t + \Delta t$  zamanındaki ivmeleri ve hızları, Eşitlik 4.50'de verilenlere benzer Newmark tipi sonlu fark formülleri kullanılarak  $\{\Delta U_b\}$  ve köprünün  $t$  zamanındaki yer değiştirme artışlarıyla araçlar için olduğu gibi ilişkilendirilebilir [53].

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}_{br}\}_{t+\Delta t} &= a_0\{\Delta U_{br}\} - a_2\{\dot{U}_{br}\}_t - a_3\{\ddot{U}_{br}\}_t \\ \{\dot{U}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}_t + a_6\{\ddot{U}\}_t + a_7\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Eşitlik 4.65'deki ifadelerin değiştirilmesiyle, sistem eşitliği (Eşitlik 4.62) aşağıdaki eşdeğer sertlik denklemlerini verecek şekilde ifade edilebilir:

$$[\bar{K}_b]_{t+\Delta t}\{\Delta U_{br}\} = \{P_b\}_{t+\Delta t} - \{\bar{F}_b\}_t \quad (4.66)$$

etkin rijitlik matrisi  $[\bar{K}_b]_{t+\Delta t}$  burada

$$[\bar{K}_b]_{t+\Delta t} = a_0[M_b] + [K_b] \quad (4.67)$$

ve etkin direnç kuvveti vektörü  $\{\bar{F}_b\}_t$

$$\{\bar{F}_b\}_t = \{F_b\}_t + [M_b] \left( a_2 \{\dot{U}_b\}_t + a_3 \{\ddot{U}_b\}_t \right) \quad (4.68)$$

Artımlı analizde yeterince küçük zaman adımları kullanılıyorsa, hem etkin rijitlik matrisi  $[\bar{K}_b]_{t+\Delta t}$  hem de yük vektörü  $\{P_b\}_{t+\Delta t}$  her zaman adımında sabit olarak kabul edilebilir [53].

Daha önce bahsedildiği gibi, türevde yer alan yoğunlaştırma prosedürü de dahil olmak üzere eşdeğer sertlik eşitliğinin (Eşitlik 4.66) doğruluk sırası, Eşitlik 4.49'da verilen Newmark tipi formüllerde belirtilenle aynıdır. Pratikte karşılaşılan araç-köprü etkileşim problemlerinin çoğu için, mevcut yaklaşımın doğruluğu tatmin edicidir ve makul ölçüde küçük zaman artışları  $\Delta t$  seçilmesi koşuluyla hiçbir yineleme gerekli değildir. Bu durumda, köprünün yer değiştirme artışları  $\{\Delta U_b\}$  doğrudan Eşitlik 4.66'dan çözülebilir, bu daha sonra Eşitlik 4.63 ile ikame edilerek toplam  $\{U_b\}_{t+\Delta t}$  yer değiştirmeleri elde edilir. Eşitlik 4.65  $t + \Delta t$  zamanında köprünün  $\{\ddot{u}_b\}_{t+\Delta t}$  ivmelerini ve  $\{\dot{U}\}_{t+\Delta t}$  hızlarını verir. Buna göre, köprünün her bir elemanının, yani  $\{u_b\}_{t+\Delta t}$ ,  $\{\dot{u}_b\}_{t+\Delta t}$  ve  $\{\ddot{u}_b\}_{t+\Delta t}$  yer değiştirmeleri, hızları ve ivmeleri hesaplanabilir. Geriye doğru ikame ile, yaylı kütle biriminin  $\{\Delta z\}$  yer değiştirme artışları Eşitlik 4.54'den hesaplanabilir, bununla birlikte yaylı kütle biriminin  $t + \Delta t$  zamanındaki toplam tepkisi Eşitlik 4.44 ve Eşitlik 4.50'den hesaplanabilir. Bu,  $t$  'den  $t + \Delta t$  ye kadar mevcut zaman adımı için analiz döngüsünü tamamlar. Bir not olarak, araç ivmesi  $\{\ddot{z}\}$ , trenle taşınan yolcular için sürüş konforunun bir ölçüsü olarak ifade edilir [53].

Daha önce belirtildiği gibi, AKE elemanına yol açan araç S'lerinin yoğunlaşması eleman seviyesinde gerçekleştirilir. Bunu, eleman olanlardan yapısal matrisleri birleştirmek için geleneksel prosedürün doğrudan uygulanabileceğini takip eder. Bu nedenle, yapı seviyesinde yoğunlaşma gerçekleştiren veya hiç yoğunlaşma olmayan yaklaşımlarla

karşılaştırıldığında, programlama ve hesaplama için gereken çaba minimumdur. Böyle bir avantaj, bir dizi hareketli araç yüküne maruz kalan köprülerin incelenmesinde daha açık hale gelir. Bu gibi durumlarda, ihtiyaç duyulan şey, treni oluşturan vagonların her bir tekerlek yükünün hareket pozisyonunu her zaman adımında belirlemek için uygun bir defter tutma şemasıdır. Burada türetilen VBI ögesinin, yalnızca düzenli aralıklarla ve sabit büyüklükteki vagonların modellenmesi için değil, aynı zamanda karayolu köprülerinden rastgele bir trafik akışı oluşturan farklı büyüklükteki araçlar için de geçerli olduğu belirtilmelidir [53].

#### 4.3.7. Yineleme Prosedürü

Araçların köprüden geçişi sırasında, araçlar zaman zaman hareket konumlarını değiştiren etkileşim veya temas kuvvetleri aracılığıyla bir yandan köprüyü harekete geçirir; Öte yandan, köprü, temas kuvvetlerinin yanı sıra sapma yoluyla da araçların davranışını etkiler. Böyle bir fenomen, yalnızca artımlı nitelikteki prosedürlerle çözülebilen tipik bir doğrusal olmayan etkileşim problemidir. Hareketli araç yükleri altında yer değiştirmesi küçük kabul edilebilecek köprüler için, her bir artımlı adımda yineleme yapılmasına gerek yoktur. Ancak, hareketli araç yükleri altında yer değiştirmeleri küçük olarak kabul edilemeyen köprüler için, her artan adım için yapısal düğümlerdeki dengesiz kuvvetlerin kaldırılması için yinelemeler yapılmalıdır. Aşağıda yinelemeler için prosedürün bir özeti verilmiştir [52].

İterasyonların gerçekleştirilmesi amacıyla, artan biçimde sunulan Eşitlik 4.66'daki AKE sisteminin eşdeğer sertlik denklemleri, yineleme özelliğini içerecek şekilde değiştirilmelidir, yani,

$$[\bar{K}_b]_{t+\Delta t} \{\Delta U_{br}\}^i = \{P_b\}_{t+\Delta t} - \{\bar{F}_b\}_{t+\Delta t}^{i-1} \quad (4.69)$$

her sembolün üzerindeki sağ üst simge  $i$ , geçerli yineleme sayısını gösterir. Eşitlik 4.69'un sağ tarafı ilk yineleme ( $i = 1$ ) için dış yük artışları ve sonraki yinelemeler ( $i \geq 2$ ) için sistem dengesiz kuvvetleri olarak yorumlanmalıdır. Başlangıçta artımlı biçimde sunulan bir denklemi, yinelemeli ölçü içeren bir denklemde değiştirme felsefesi, başlangıçta  $t$  zamanı ile ilişkilendirilen tüm terimlerin, mevcut artımlı adım ve orijinal olarak  $t + \Delta t$  zamanı ile ilişkili tüm terimler, mevcut, yani  $i$ ., yinelemeli adım için olanlardır. Örneğin, Eşitlik 4.68'deki dirençli kuvvet vektörü,  $i \geq 2$  olan yinelemeli adımlar için aşağıdaki gibi değiştirilmelidir:

$$\{\bar{F}_b\}_{t+\Delta t}^{i-1} = \{F_b\}_{t+\Delta t}^{i-1} + [M_b] \left( a_2 \{\dot{U}_b\}_{t+\Delta t}^{i-1} + a_3 \{\ddot{U}_b\}_{t+\Delta t}^{i-1} \right) \quad (4.70)$$

Eşitlik (6.30), çok sayıda doğrusal olmayan problemin incelenmesinde karşılaşılan tipik bir doğrusal olmayan denklemi temsil eder. Bu tür sorunları çözmek için, sabit yüklerde yinelemeler gerçekleştiren değiştirilmiş Newton-Raphson yöntemi kullanılabilir [52].

Sistem eşitliğinin (Eşitlik 4.69) başlangıç koşulları ( $i = 1$  için)

$$\{\bar{F}_b\}_{t+\Delta t}^0 = \{\bar{F}_b\}_t^l \quad (4.71)$$

$$\{U_{br}\}_{t+\Delta t}^0 = \{U_{br}\}_t^l$$

Burada  $\{\bar{F}\}_t^l$  Eşitlik 4.68'de verilmiştir ve sağ üst simge  $l$  önceki artışlı veya zaman adımının son yinelemesini gösterir. Buna göre, sistem eşitliği (Eşitlik 4.69), mevcut artımlı adımın ilk yinelemesi (yani,  $i = 1$ ) için aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$[\overline{K}]_{t+\Delta t} \{\Delta U_b\}^1 = \{P_b\}_{t+\Delta t} - \{\overline{F}_b\}_t^l \quad (4.72)$$

Burada, etkin rijitlik matrisi  $[\overline{K}]_{t+\Delta t}$ 'nin, değiştirilmiş Newton-Raphson yöntemi kullanılarak yapılan yinelemeler için güncellenmesi gerekmeyen her bir artımlı adımda sabit kaldığı belirtilmelidir Her yinelemeli adım için, köprünün yer değiştirme artışları  $\{\Delta U_b\}^i$  Eşitlik 4.69'dan çözülebilir. Buna göre, mevcut yinelemeli adım için köprünün toplam yer değiştirmeleri şu şekilde toplanabilir:

$$\{U_{br}\}_{t+\Delta t}^i = \{U_{br}\}_{t+\Delta t}^{i-1} + \{\Delta U_{br}\}^i \quad (4.73)$$

Köprünün ivmesi ve hızı, iterasyon özelliği dikkate alınarak Eşitlik 4.65'den hesaplanabilir, yani,

$$\{\ddot{U}_{br}\}_{t+\Delta t}^i = a_0 \{\Delta U_{br}\}^i - a_2 \{\dot{U}_{br}\}_{t+\Delta t}^{i-1} - a_3 \{\ddot{U}_{br}\}_{t+\Delta t}^{i-1} \quad (4.74)$$

$$\{\dot{U}_{br}\}_{t+\Delta t}^i = \{\dot{U}\}_{t+\Delta t}^{i-1} + a_6 \{\ddot{U}_{br}\}_{t+\Delta t}^{i-1} + a_7 \{\ddot{U}_{br}\}_{t+\Delta t}^i$$

Köprünün global koordinatlardaki  $\{U_b\}_{t+\Delta t}^i$  yer değiştirmeleri elde edildiğinde, köprünün her bir elemanı için  $\{u_b\}_{t+\Delta t}^i$  yer değiştirmeleri buna göre hesaplanabilir. Araç yer değiştirme artışları  $\{\Delta z\}^i$ , Eşitlik 4.54'den,  $t + \Delta t$  alt simgeli terimleri iteratif adımla ilişkili terimler ve  $t$  alt simgeli terimleri  $(i - 1)$  yinelemeli adım ile ilişkili terimler olarak ele alarak hesaplanabilir. Yaylı kütle biriminin iteratif adım için toplam tepkileri,



Eşitlik 4.44 ve Eşitlik 4.50'den başlangıç koşulları  $\{z\}_{t+\Delta t}^0 = \{z\}_t^l$  ile aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$\{z\}_{t+\Delta t}^i = \{z\}_{t+\Delta t}^{i-1} + \{\Delta z\}^i \quad (4.75a)$$

$$\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t}^i = a_0\{\Delta z\}^i - a_2\{\dot{z}\}_{t+\Delta t}^{i-1} - a_3\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t}^{i-1} \quad (4.75b)$$

$$\{\dot{z}\}_{t+\Delta t}^i = \{\dot{z}\}_{t+\Delta t}^{i-1} + a_6\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t}^{i-1} + a_7\{\ddot{z}\}_{t+\Delta t}^i \quad (4.75c)$$

#### 4.4. DOĞRULAMA VE YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, Eşitlik 4.9 ve Eşitlik 4.10'dan elde edilen tek serbestlik dereceli araç köprü modelinin PD çözümü, sonlu eleman ve yarı analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmada yineleme için üç farklı zaman aralığı,  $\Delta t_1 = 0,01s$ ,  $\Delta t_2 = 0,001s$  ve  $\Delta t_3 = 0,0001s$  seçilmiştir.

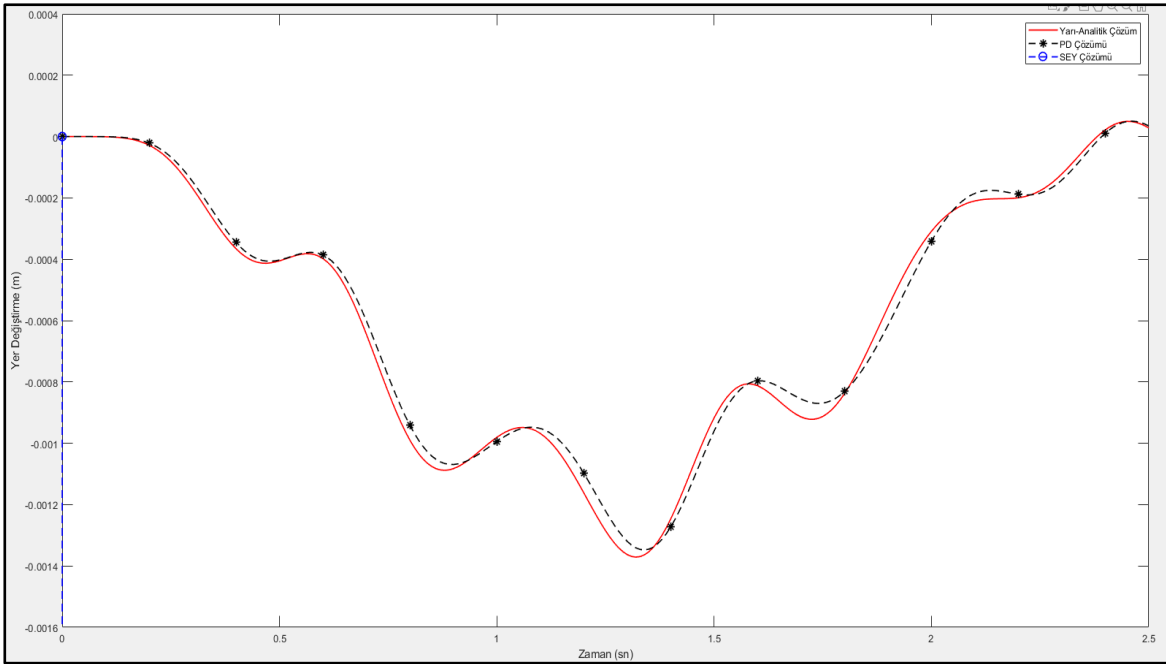
Örnek uygulamada köprü için aşağıdaki özellikler [21] benimsenmiştir: kesit alanı  $A = 2.0 m^2$ , eylemsizlik momenti  $I = 0.12 m^4$ , elastik modülü  $E = 2.75 \times 10^{10} N/m$ , uzunluk  $L = 25 m$  ve birim uzunluktaki ağırlık  $\bar{m}_{br} = 4800 kg/m$ . Aracın varsayılan kütlesi  $m_{vh} = 1200 kg$  ve yay sabiti  $k_{vh} = 500,000 N/m$ , oluşacak titreşim frekansı ise  $w_{vh} = 20.41 rad/s$ .

Ağırlık fonksiyonu Eşitlik 4.20, her noktanın ailesi içindeki maddi noktalar arasındaki yerel olmama derecesini belirler. Herhangi bir boyutsuz ağırlık fonksiyonu matematiksel olarak kabul edilebilir; ancak, gerçekte, içinde ağırlık fonksiyonunun akıcılığı, artan

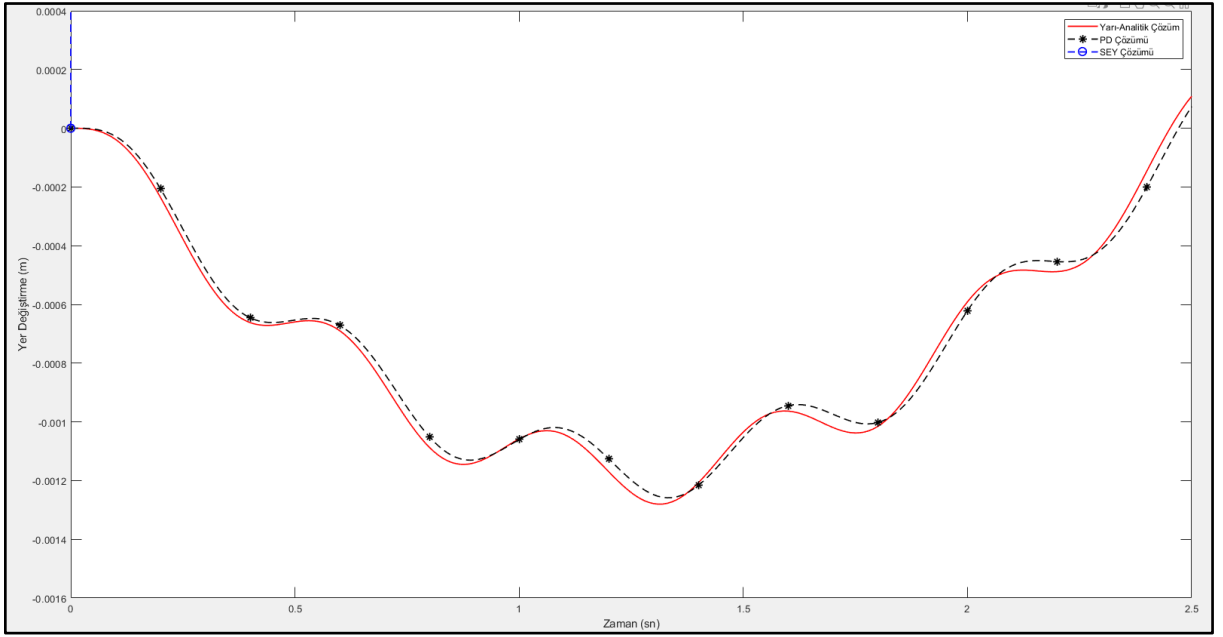
mesafelerle etkileşimin derecesindeki azalmayı ve fiziksel bir olayı tanımlayan diferansiyel denklemin özelliklerini yansıtmalıdır. Bir sınırlama olmamakla birlikte, tüm uygulamaların çözümünde ağırlık fonksiyonu Gauss dağılımı şeklinde şu şekilde belirtilmiştir:

$$\omega(|\xi|) = e^{-(2|\xi|/\delta)^2} \quad (4.40)$$

Bu özel biçim, malzeme noktaları arasındaki etkileşimin derecesini belirtmek için gerçekçi bir yol sağlar ve hem hesaplama doğruluğunu hem de kararlılığı artırır. Aracın kırıktan  $v_{vh} = 10 \text{ m/s}$  hızında geçtiği durumda, aracın  $\Delta t_1 = 0,01s$ , için düşey yer değiştirmeleri Şekil 4.2'de verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde PD çözümünün yarı analitik çözüme çok yakın sonuçlar verdiği ve bu zaman aralığında sonlu eleman yönteminin yetersiz kaldığı görülmektedir. Şekil 4.3'te  $\Delta t_1 = 0,01s$ , için köprünün düşey yer değiştirmeleri ayrı ayrı verilmiştir

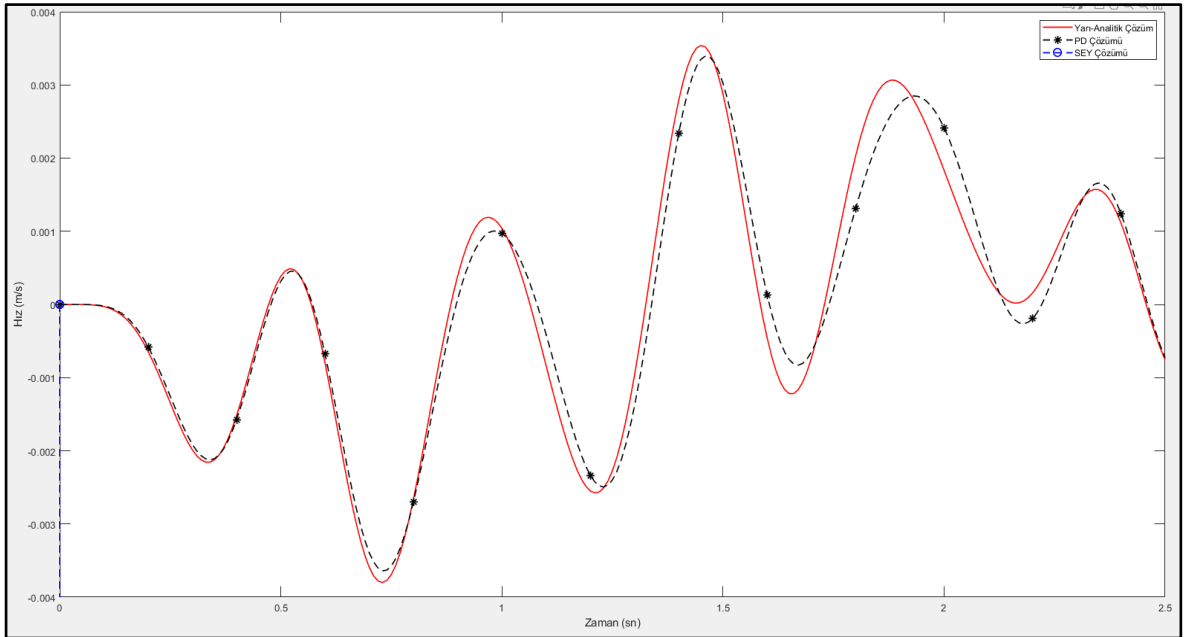


Şekil 4.2.  $\Delta t_1$  için aracın düşey yer değiştirme tepkisi.



Şekil 4.3.  $\Delta t_1$  için köprünün orta noktasının dikey yer değıştirme yanıtı.

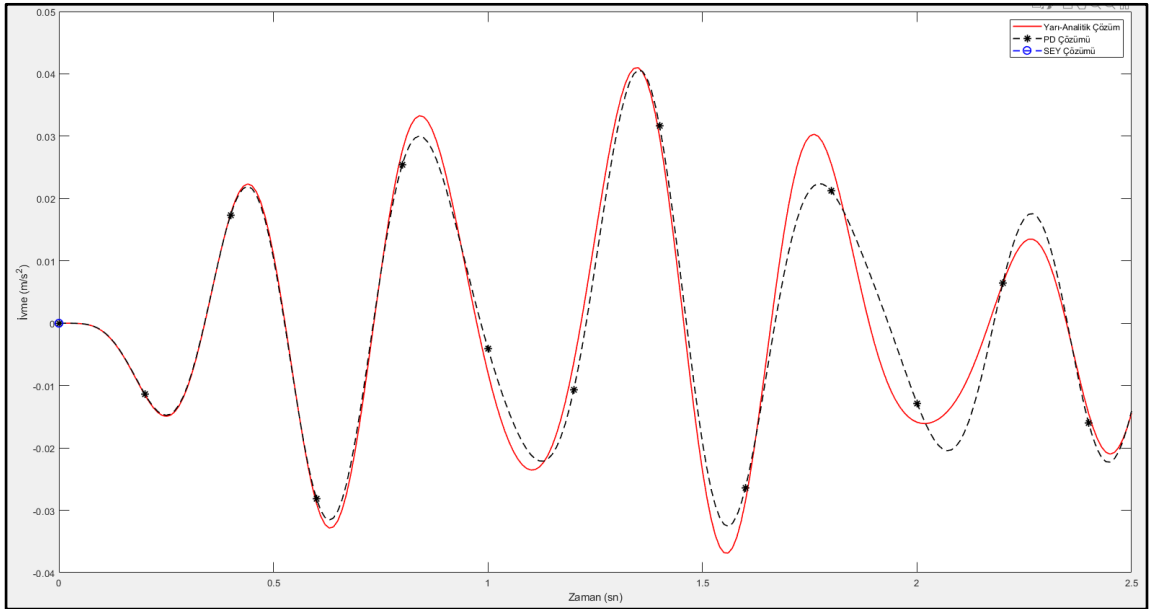
Aynı şekilde PD çözümü yarı analitik çözüme çok yakın sonuçlar verirken, bu zaman aralığının sonlu eleman yöntemi için yetersiz olduğu görülmektedir.



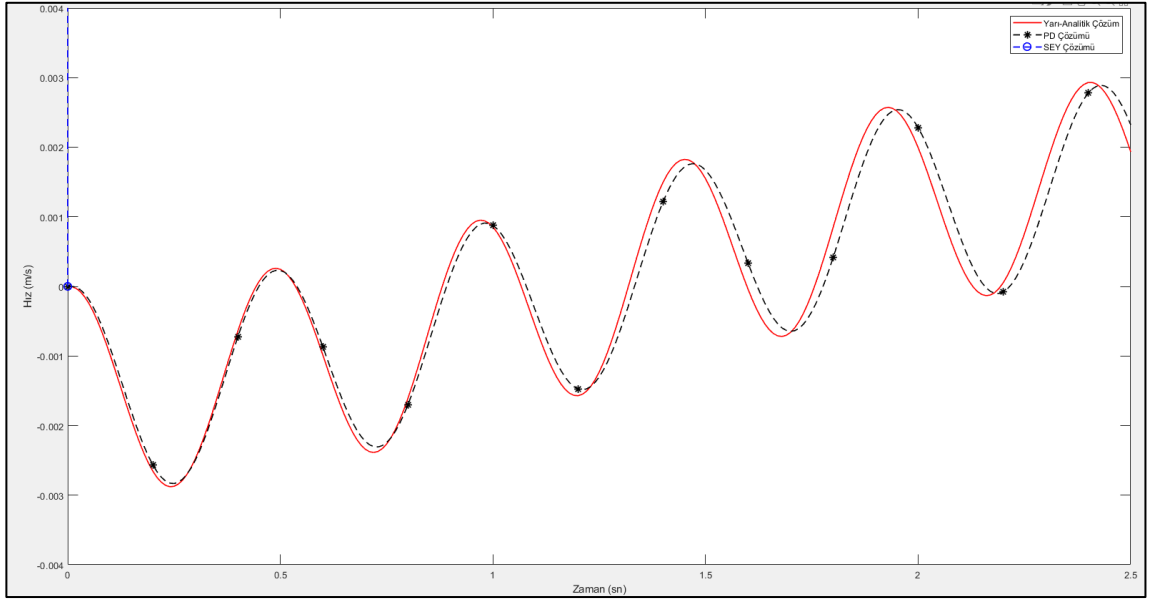
Şekil 4.4.  $\Delta t_1$  için aracın dikey hız yanıtı.

Ayrıca aracın düşey doğrultudaki hız (Şekil 4.4) ve ivme (Şekil 4.5) eğrisi  $\Delta t_1$  için incelendiğinde sonlu elemanlar yönteminin sonuç vermediği, aksine PD çözümünün yarı analitik çözüme göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.  $\Delta t_1$  zaman aralığında köprünün dikey yöndeki hız Şekil 4.6 ve ivme Şekil 4.7 tepkileri incelendiğinde, PD çözümünün yarı analitik çözüme daha iyi yakınsadığı, son eleman yönteminin ise belirtilen zaman aralığında herhangi bir sonuç üretmediği görülmektedir.

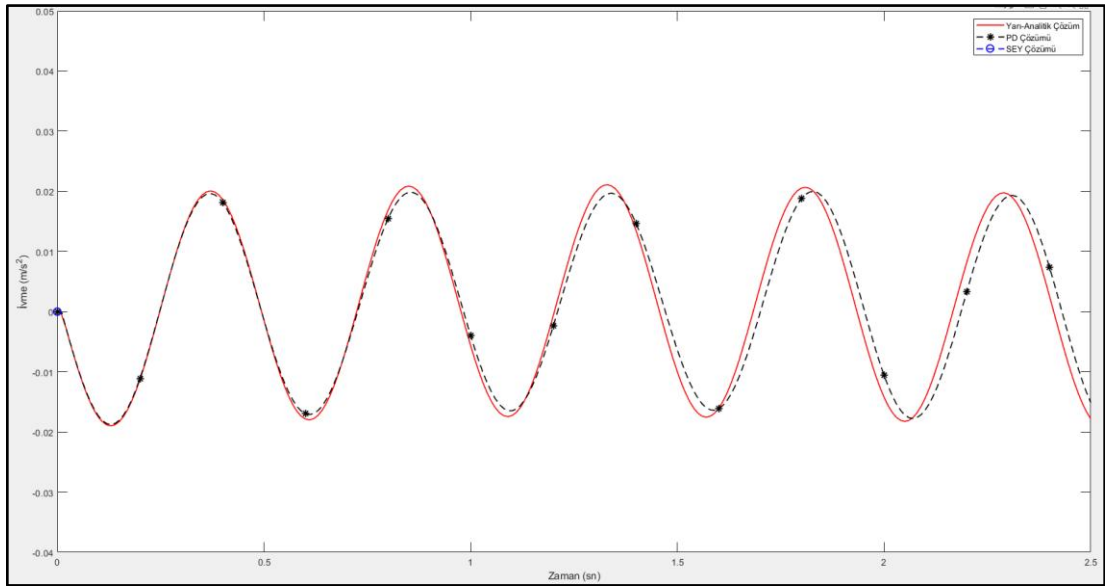
Aynı zamanda  $\Delta t_2$  için araç üzerindeki düşey yer değiştirme, hız ve ivme grafikleri Şekil 4.8'da gösterilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde PD çözümünün sonlu eleman çözümüne göre analitik çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Öte yandan,  $\Delta t_2$  için köprünün düşey yer değiştirme, hız ve ivme grafikleri incelendiğinde, PD çözümünün Şekil 5.1'deki yarı analitik çözüme daha iyi yakınsadığı görülmektedir. Bu çalışmada yarı analitik çözüme yaklaşık hatanın belirlenmesinde global hata yaklaşımı tercih edilmiştir. Yakınsama kriterleri, aşağıdaki şekilde tanımlandığı gibi küresel bir hata ölçüsüne [29] dayanmaktadır.



Şekil 4.5.  $\Delta t_1$  için aracın dikey ivme yanıtı.



Şekil 4.6.  $\Delta t_1$  için köprünün orta noktasının dikey hız yanıtı.



Şekil 4.7.  $\Delta t_1$  için köprünün orta noktasının dikey ivme yanıtı.

$$\varepsilon = \frac{1}{|u^{(e)}|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{m=1}^K [u_m^{(e)} - u_m^{(c)}]^2} \quad (4.41)$$

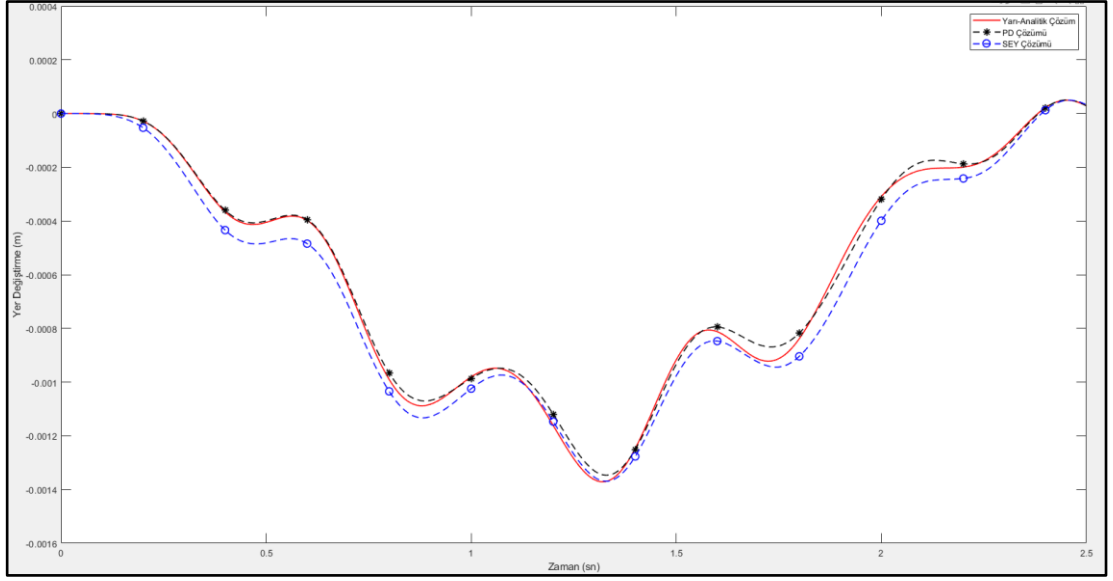
$e$  ve  $c$  üst simgeleri sırasıyla kesin ve sayısal çözümleri ifade eder.  $K$  parametresi, etki alanındaki toplam eşdizim noktası sayısını temsil eder. Köprü üzerinde hareket eden aracın dinamik tepkilerinin Peridinamik Diferansiyel Operatörü ve sonlu eleman yöntemine göre hata analizi Çizelge 4.1'de verilmiştir. Tablo incelendiğinde PD çözümünün hata oranlarının sonlu elemanlar yöntemine göre daha düşük olduğu görülmektedir. Benzer şekilde Çizelge 4.2'den köprünün dinamik tepkilerinin hata analizine bakıldığında PD çözümünün hata oranlarının sonlu elemanlar yöntemine göre daha düşük seviyelerde olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.1. Araç için PD ve SEY sonuçlarının dinamik yanıtlarının hata oranları.

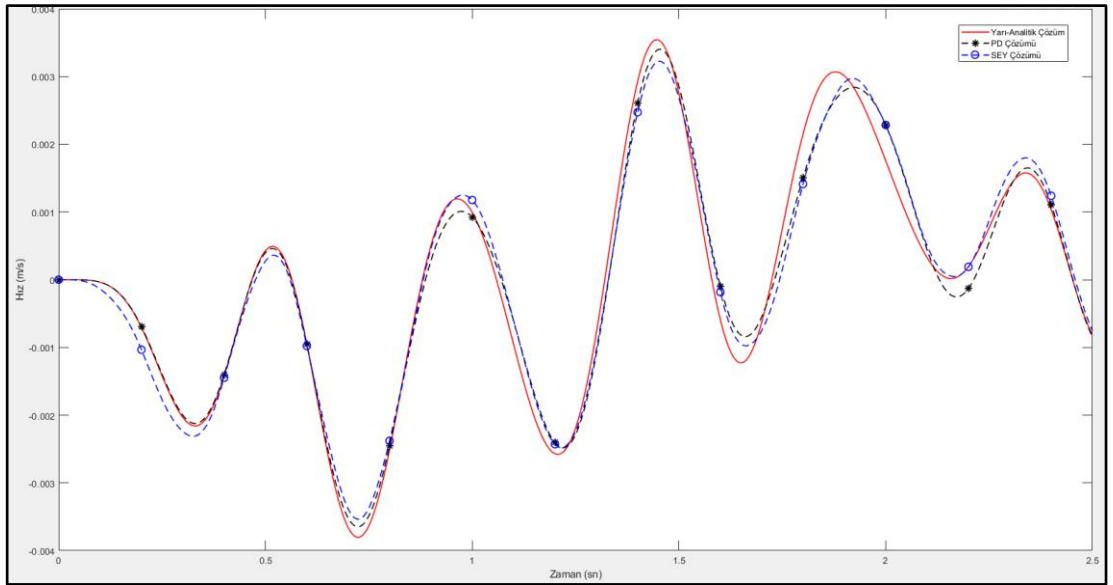
CEVAP	HATALAR%		
	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$
Aracın Dikey Yer değiştirmesinin PD Çözümü	0.623532	0.423538	0.407682
Aracın Dikey Hızının PD Çözümü	0.085212	0.071753	0.070283
Aracın Dikey İvmesinin PD Çözümü	0.090064	0.0903	0.088287
Aracın Dikey Yer değiştirmesinin SEY Çözümü	$\infty$	1.070004	1.067242
Aracın Dikey Hızının SEY Çözümü	$\infty$	0.079332	0.076914
Aracın Dikey İvmesinin SEY Çözümü	$\infty$	0.09233	0.088658

Çizelge 4.2. Köprü için PD ve SEY sonuçlarının dinamik yanıtlarının hata oranları.

CEVAP	HATALAR%		
	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$
Köprünün Dikey Yer değiştirmesinin PD Çözümü	0.623532	0.423538	0.407682
Köprünün Dikey Hızının PD Çözümü	0.085212	0.071753	0.070283
Köprünün Dikey İvmesinin PD Çözümü	0.090064	0.0903	0.088287
Köprünün Dikey Yer değiştirmesinin SEY Çözümü	$\infty$	1.070004	1.067242
Köprünün Dikey Hızının SEY Çözümü	$\infty$	0.079332	0.076914
Köprünün Dikey İvmesinin SEY Çözümü	$\infty$	0.09233	0.088658

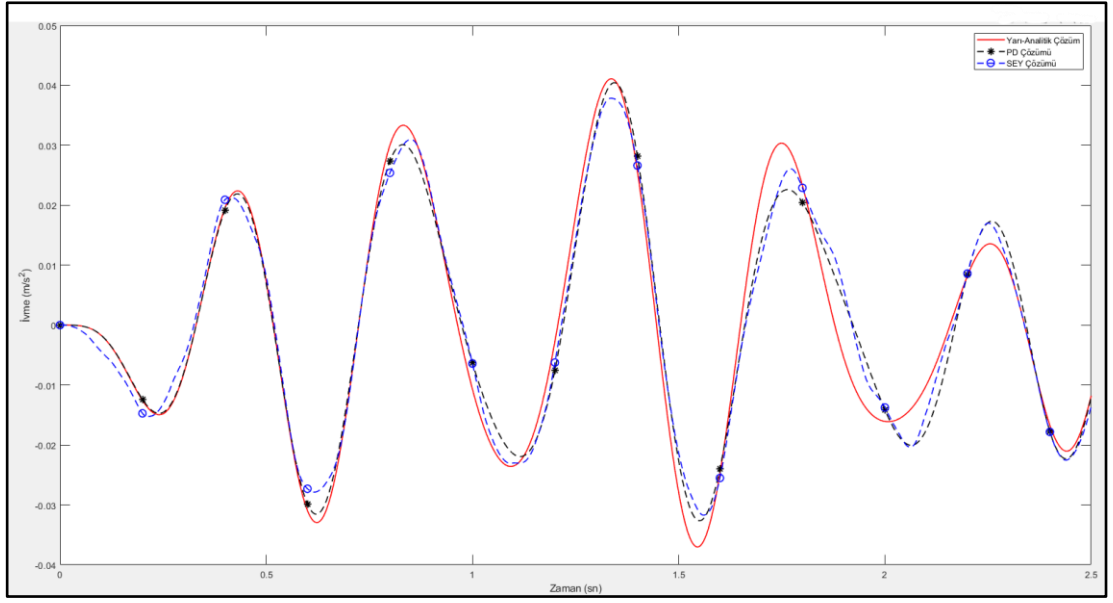


(a)



(b)





(c)

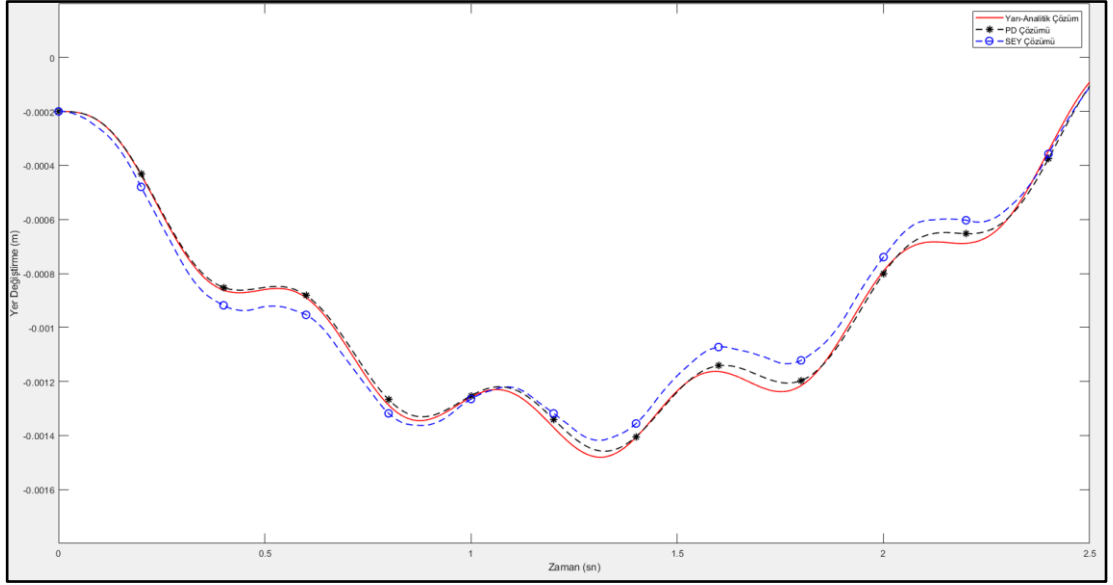
Şekil 4.8. Aracın  $\Delta t_2$  için dikey yerdeğiştirme (a), hız (b) ve ivme (c) cevabı.

## BÖLÜM 5

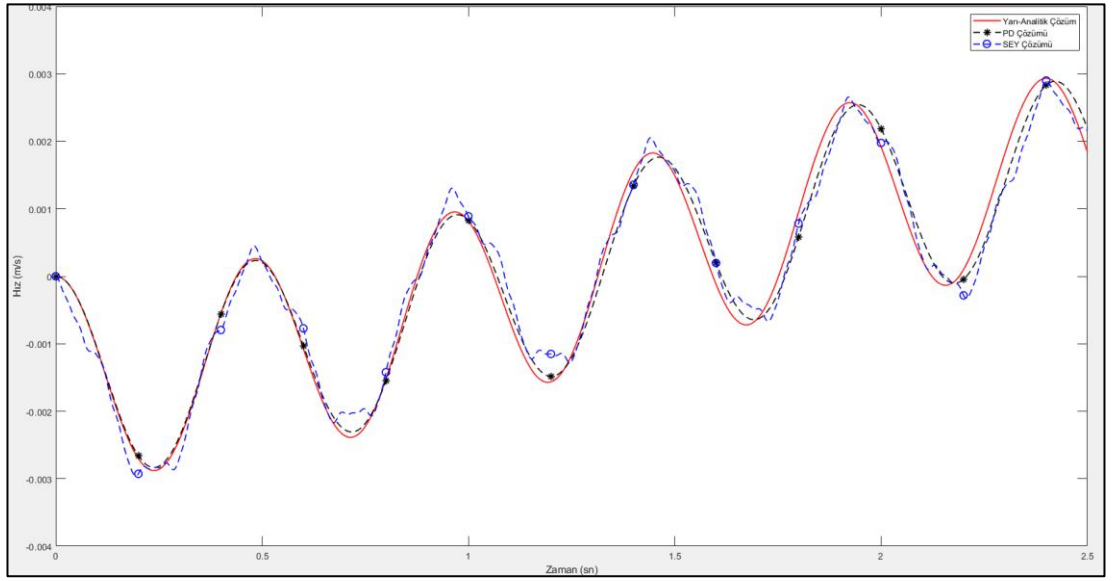
### SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, tek serbestlik dereceli araç köprü etkileşiminin dinamik tepkilerinin elde edilmesinde yarı analitik çözüm ile Peridinamik Diferansiyel Operatör ve sonlu eleman yönteminin karşılaştırılması yapılmıştır. Son eleman yöntemi için yapılan çalışmalar ışığında Newmark $\beta$  yöntemi tercih edilmiş ve bu doğrultuda sırasıyla  $\beta = 0.25$  ve  $\gamma = 0.25$  katsayıları belirlenmiştir. Yineleme için  $\Delta_1 = 0.01$  s,  $\Delta_2 = 0.001$  s ve  $\Delta_3 = 0.0001$  s olmak üzere üç farklı zaman aralığı belirlenerek, aracın ve köprü orta noktasının yer değiştirme, hız ve ivme tepkileri dikey yönde gözlemlenmiştir.

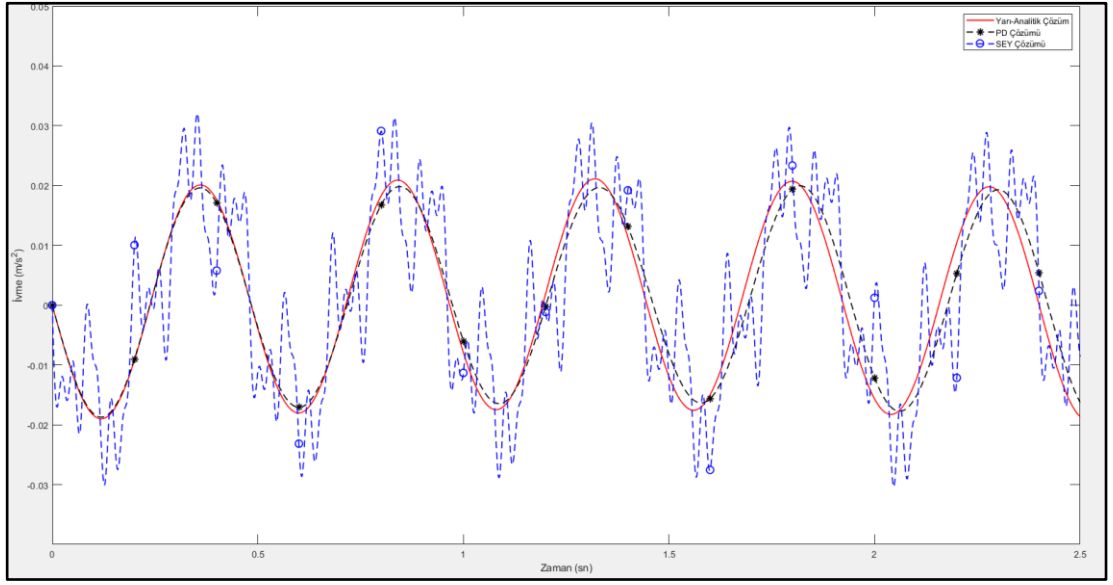
Hata analizi için global hata ölçümü kullanılmış ve aracın düşey doğrultudaki yer değiştirme, hız ve ivme tepkilerinin PD çözümünde sırasıyla %0.623532 , %0.085212 ve %0.090064 oranlarında yarı analitik bir çözüme yakınsadığı belirlenmiştir. Aynı zaman aralığında sonlu eleman yönteminin sonuç vermediği ortaya çıktı. Benzer şekilde PD çözümünde köprü orta noktasının ilk zaman aralığı için %0.255793, %0.077149 ve %0.119281 oranlarında yarı analitik çözüme yakınsadığı, sonlu elemanların tekrar sonuç vermediği görülmüştür.



(a)



(b)



(c)

Şekil 5.1. Köprünün orta noktasının  $\Delta t_2$  için dikey yer değiştirme (a), hız (b) ve ivme (c) cevabı.

İkinci ve üçüncü zaman aralıklarında araç ve köprü orta noktasının dinamik tepkisi incelendiğinde, PD çözümün sonlu elemanlar yöntemine göre daha düşük hata oranıyla daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Sonuçlar ışığında Peridinamik Diferansiyel Operatörün sonlu elemanlar yöntemine göre daha doğru sonuç verdiği ortaya çıkmıştır.

## KAYNAKLAR

1. Sadiku, S. and Leipholz, H., “On the dynamics of elastic systems with moving concentrated masses”, *Ingenieur-Archiv*, 57: 223-242 (1987).
2. Akin, J. E. and Mofid, M., “Numerical solution for response of beams with moving mass”, *Journal of Structural Engineering*, 115: 120-131 (1989).
3. Gao, Q. and Zhang, J., “Analytical solutions for a mass moving along a finite stretched string with random surface irregularities”, *Journal of Sound and Vibration*, 371: 305–320 (2016).
4. Fryba, L. “Vibration of solids and structures under moving loads”, volume 1, *Springer*, Groningen, 452-457 (1972).
5. Martinez-Castro, A., Museros, P., Castillo-Linares, A., “Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span bernoulli–euler beams traversed by moving loads”, *Journal of Sound and Vibration*, 294: 278–297 (2006).
6. Chatterjee, P., Datta, T., Surana, C., “Vibration of continuous bridges under moving vehicles”, *Journal of Sound and Vibration*, 169: 619–632 (1994).
7. Pesterev, A. V., Bergman, L. A., “Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator”, *Journal of engineering mechanics*, 123: 878–884 (1997).
8. Yang, Y. B., Tan, C., Bergman, L., “Direct numerical procedure for solution of moving oscillator problems”, *Journal of Engineering Mechanics*, 126: 462–469 (2000).
9. Yang, Y. B., Lin, B.H., “Vehicle-bridge interaction analysis by dynamic condensation method”, *Journal of Structural Engineering*, 121: 1636–1643 (1995).
10. Yang, Y. B., Yau, J.D., “Vehicle-bridge interaction element for dynamic analysis”, *Journal of Structural Engineering* 123: 1512–1518 (1997).

11. Stephan, P., Chucheepsakul, S., “Dynamic responses of a two-span beam subjected to high speed 2dof sprung vehicles”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 6: 413–430 (2006).
12. Mizrak, C., Esen, I., “Determining effects of wagon mass and vehicle velocity on vertical vibrations of a rail vehicle moving with a constant acceleration on a bridge using experimental and numerical methods”, *Shock and Vibration*, (2015).
13. Mizrak, C., Esen, I., “The optimisation of rail vehicle bogie parameters with the fuzzy logic method in order to improve passenger comfort during passage over bridges”, *International Journal of Heavy Vehicle Systems* 24: 113–139 (2017).
14. Dimitrovov´a, Z., “Semi-analytical solution for a problem of a uniformly moving oscillator on an infinite beam on a two-parameter visco-elastic foundation”, *Journal of Sound and Vibration* 438: 257–290 (2019).
15. Yang, Y., Chang, K., “Extraction of bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle enhanced by the emd technique”, *Journal of sound and vibration* 322: 718–739 (2009).
16. Yang, Y., Cheng, M., Chang, K., “Frequency variation in vehicle–bridge interaction systems”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 13: 1350019 (2013).
17. Biggs, J. M., “Introduction to structural dynamics”, *McGraw Hill*, College, (1964).
18. Yang, Y. B., Lin, C., Yau, J., “Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle”, *Journal of Sound and Vibration* 272: 471–493 (2004).
19. Chou, S., Cheng, F., Huang, C. S., “Dynamic analyses of a flexible vehicle moving along a flexible guideway considering the tip-off effect”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 13: 1350009 (2013).
20. Wang, Y., Wei, Q., Yau, J. “Interaction response of train loads moving over a two-span continuous beam”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 13: 1350002 (2013).
21. Yang, Y., Lin, C., “Vehicle–bridge interaction dynamics and potential applications”, *Journal of sound and vibration*, 284: 205–226 (2005).
22. Timoshenko, S. P., “History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures”, *McGraw-Hill*, New York, 25-69 (1953).

23. Garg, V. K., Dukkipati, R. V., “*Dynamics of Railway Vehicle Systems*”, **Academic Press**, Toronto, (1984).
24. Shi, J., Wang, Y. J., “Dynamic response analysis of single-span guideway caused by high speed maglev train”, **Latin American Journal of Solids and Structures**, 8 (3): 213-228 (2011).
25. Yau, J. D., “Resonance of continuous bridges due to high speed trains”, **Journal of Marine Science and Technology**, 9 (1): 14-20 (2001).
26. Museros, P., Alarcón, E., “Influence of the Second Bending Mode on the Response of High-Speed Bridges at Resonance”, **Journal of Structural Engineering**, 131 (3): :404–415 (2005).
27. Popov, E. P., "Mechanics of Materials", **Prentice Hall**, New Jersey, 52-69 (1976).
28. Moghaddas, M., "*Finite Element Analysis and Passive Vibration Control of the Timoshenko Beam Traversed by a Moving Vehicle Using an Optimized Tuned Mass Damper*", **Concordia University**, Montreal, 15-87 (2008).
29. Moghaddas, M., Sedaghati, R., Esmailzadeh, E., Khosravi, P., “Finite element analysis of a Timoshenko beam traversed by a moving vehicle”, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K-Journal of Multi-Body Dynamics**, 223 (3): 231–243 (2009).
30. Moghaddas, M., Esmailzadeh, E., Sedaghati, R., Khosravi, P., “Vibration control of Timoshenko beam traversed by moving vehicle using optimized tuned mass damper”, **Journal of Vibration and Control**, 18 (6): 757–773 (2012).
31. Timoshenko, S. P., “On the Correction for Shear of the Differential Equations for Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section”, **Philosophical Magazine**, 41 (245): 744–746 (2017).
32. Love, A. E. H., “*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”, **Cambridge press**, New York, 18-36 (1944).
33. Han, S. M., Benaroya, H., Wei, T., “Dynamics of transversely vibrating beams using engineering theories”, **Journal of Sound and Vibration**, 255 (5): 935–988 (1999).
34. Dmitriev, A. S., “Transverse vibrations of a three-span beam under a moving load”, **International Applied Mechanics**, 10 (1): 1263–1266 (1976).
35. Olsson, M., “On the fundamental moving load problem”, **Journal of Sound and Vibration**, 145 (2): 299–307 (1991).

36. Zheng, D. Y., Cheung, Y. K., Au, F. T. K., Cheng, Y. S., “Vibration of multispans non-uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions”, *Journal of Sound and Vibration*, 212 (3): 455–467 (1998).
37. Stanisic, M. M., Hardin, J. C., “On the response of beams to an arbitrary number of concentrated moving masses”, *Journal of Franklin Institution*, 287: 115–123 (1969).
38. Ting, E. C., Genin, J., Ginsberg, J.H., “A general algorithm for the moving mass problems”, *Journal of Sound and Vibration*, 33 (1): 49–58 (1974).
39. Esmailzadeh, E., Ghorashi, M., “Vibration analysis of beams traversed by uniform partially distributed moving masses”, *Journal of Sound and Vibration*, 184 (1): 9–17 (1995).
40. Esmailzadeh, E., Jalili, N., “Vehicle–passenger–structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles”, *Journal of Sound and Vibration*, 260 (4): 611–635 (2003).
41. Yang, Y. B., Yau, J. D., Wu, Y. S., "*Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Applications to High-Speed Railways*", *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, Danvers, 32-63 (2004).
42. L. Fryba, “*Vibration solids and structures under moving loads*”, *Thomas Telford House*, Reston, 128-160 (1999).
43. Wu, J. S., Dai, C. W., “Dynamic responses of multi-span non-uniform beam due to moving loads”, *Journal of Structural Engineering*, 113 (3): 458–474 (1987).
44. Wu, T. X., Thompson, D.J., “On the impact noise generation due to a wheel passing over rail joints”, *Journal of Sound and Vibration*, 267: 485– 496 (2003).
45. Weaver, W., Timoshenko, S.P., Young, D.H., "*Vibration problems in engineering*", *John Wiley & Sons*, New York, 65-113 (1990).
46. Koç, M. A., “Araç Yol Etkileşiminin Modellenmesi Ve Araca Etki Eden Kuvvetlerin Analizi”, Doktora Tezi, *Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Karabük, 10-16 (2017).
47. Reis, M., “Hareketli Yüklere Maruz Mesnetli Eğrisel Kirişlerin Dinamik Davranışlarının İncelenmesi”, Doktora Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa, 20-27 (2009).
48. Nielsen, J. C. O., Igeland, A., “Vertical dynamic interaction between train and track-influence of wheel and track imperfections”, *Journal of Sound and Vibration*, 187(5): 825-839 (1995).



49. Newton, S. G., Clark, R. A., “An investigation into the dynamic effects on the track of wheel flats on railway vehicles”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 21(4): 287–297 (1979).
50. Mohite, A. G., Mitra, A.C., “Development of Linear and Non-linear Vehicle Suspension Model” *Materials Today: Proceedings*, 5: 4317-4326 (2018).
51. Johansson, A., Nielsen, J. C. O., “Out of round railway wheels, wheel rail contact forces and track response derived from the field tests and numerical simulation”, *Journal of Rail and Rapid Transit*, 217: 135-146 (1995)
52. Esen, İ., Mızrak, C., “Y32 Boji Gövdesinin Statik ve Dinamik Yükleme Analizleri”, *International Journal of Engineering Science and Thecnology*, 14(4): 123-128 (2011).
53. Yang, Y. B., Yau, J. D., Wu, Y.S., “Vehicle - Bridge Interaction Dynamics”, *World Scientific*, New Jersey, 159-171 (2004).
54. Dugush, Y. A., Eisenberger, M., “Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads”, *Journal of Sound and Vibration*, 254: 911–926 (2002).

## **ÖZGEÇMİŞ**

Ahmet Yasir YENİAYDIN ilk ve orta öğrenimini Karabük'te tamamladı, Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2014 yılında Karabük Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mekatronik Mühendisliği bölümüne başlamış ve 2018'de başarıyla mezun olduktan sonra 2019'da Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Mekatronik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimine başlamış ve halen eğitimini sürdürmektedir.