ÇOKLU ÇOKGENSEL SAYILAR ÜZERİNE

Esra GEBEŞ

2024
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

Tez Danışmanları
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN
Öğr. Gör. Dr. Ümit SARP

ÇOKLU ÇOKGENSEL SAYILAR ÜZERİNE

Esra GEBEŞ

T.C.
Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

Tez Danışmanları
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN
Öğr. Gör. Dr. Ümit SARP

KARABÜK
Ocak 2024

Esra GEBEŞ tarafından hazırlanan “ÇOKLU ÇOKGENSEL SAYILAR ÜZERİNE” başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN	....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı	
Öğr. Gör. Dr. Ümit SARP	....
2. Danışman, Matematik Anabilim Dalı	

Bu çalışma, jürimiz tarafından Oy Birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 25/01/2024

<u>Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)</u>		<u>İmzası</u>
Başkan	: Prof. Dr. Ayşe NALLI (KBÜ)	....
Üye	: Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR (BAÜN)	....
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN (KBÜ)	....
Üye	: Öğr. Gör. Dr. Ümit SARP (İKÇÜ)	....

KBÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Zeynep ÖZCAN	....
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü	

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Esra GEBEŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇOKLU ÇOKGENSEL SAYILAR ÜZERİNE

Esra GEBEŞ

Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanları:
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN
Öğr. Gör. Dr. Ümit SARP (2. Danışman)

Ocak 2024, 52 sayfa

Bu araştırma kapsamında, figürsel sayılar arasında yer alan çokgensel sayılara odaklanılmış ve bu sayıların özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Aynı zamanda sürekli kesirler kullanılarak Pell denklemlerinin çözümü üzerine yoğun bir çalışma yürütülmüştür. Elde edilen Pell denklemlerinin çözümleri temel alınarak, çeşitli çokgensel sayıların terimleri oluşturulmuştur.

Anahtar Sözcükler : Çokgensel Sayılar, Çoklu Çokgensel Sayılar, Pell Denklemleri, Sürekli Kesirler

Bilim Kodu : 20401

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON MULTI POLYGONAL NUMBERS

Esra GEBEŞ

Karabük University
Institute of Graduate Programs
Department of Mathematics

Thesis Advisors:
Assist. Prof. Dr. Ahmet EMİN
Lecturer Dr. Ümit SARP (Co-Advisor)

January 2024, 52 pages

In this study, the focus has been placed on polygonal numbers, which are a subset of figurate numbers, and the properties of these numbers have been thoroughly examined. Additionally, an investigation into the solutions of Pell equations has been conducted through the utilization of continued fractions. By leveraging the solutions obtained for Pell equations, terms of multiple polygonal numbers have been generated.

Key Word : Polygonal Numbers, Multi Polygonal Numbers, Pell Equations, Continued Fractions

Science Code : 20401

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sürecinde danışmanlığımı üstlenen, destek ve ilgisini hiçbir zaman esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın planlanmasında ve yürütülmesinde tezime yön veren, bilgisayar ve programlama bilgileri ile bana her zaman destek olan sayın hocam Öğr. Gör. Dr. Ümit SARP' a teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen, bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan annem Müveddet GEBEŞ ve babam Bahattin GEBEŞ'e teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLO DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

SİMGELER

$S_m(n)$	: n'inci m-gensel sayı
$\left[a_0; a_1, a_2, a_{3,\dots}\right]$	: sonsuz sürekli kesir
$\left[a_0; a_1, a_2, a_{3,\dots}, a_n\right]$	: sonlu sürekli kesir
$\lfloor x \rfloor$	: x'den küçük ya da x'e eşit en büyük tamsayı
$C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$	: $\dfrac{p}{q}$ rasyonel sayısının $i.$ yakınsayanı
$ax + by = c$	: lineer Diophantine denklem
$x^2 - dy^2 = N$	: Pell denklemi
F_n	: $n.$ci Fibonacci sayısı
L_n	: $n.$ci Lucas sayısı
P_n	: $n.$ci Pell sayısı
Q_n	: $n.$ci Pell-Lucas sayısı
OEIS	: On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Figürsel sayılar uzun ve zengin bir geçmişe sahiptir. Figürsel sayılar ilk olarak, geometri ile aritmetiği birbirine bağlama çabası içinde olan ve Pisagor tarafından kurulan Pisagor okulunda (M.Ö. V. yüzyıl) ele alınmıştır. Pisagorcular için sayı kutsaldı ve *"her şey sayıdır"* öğretisine göre, herhangi bir pozitif tamsayıyı düzlem üzerindeki noktalar kümesi olarak kabul ettiler. Böylece figürsel sayının ilk tanımı bu okulda yapılmış oldu. Figürsel sayılar için çağdaş matematiksel dil ile ifade edilene kadar pisagorcuların yapmış olduğu tanım kullanıldı [1].

Figürsel sayılar teorisi, matematiğin uğraştığı başlıca alanlardan birisi olmamasına rağmen, bu sayıların güzelliği binlerce yıl boyunca birçok bilim insanının dikkatini çekmeyi başarmıştır. Bu alanda çalışan ünlü matematikçilerin bir kısmı kronolojik olarak şu şekildedir. Sisamlı Pisagor (M.Ö. 582 – M.Ö. 507), İskenderiyeli Hypsicles (M.Ö. 190 – M.Ö. 120), Heroneyalı Plutarch (M.S. 46 – M.S. 122), Ceraşlı Nicomachus (M.S. 60 – M.S. 120), Smirnili Theon (M.S. 70 – M.S. 135), İskenderiyeli Diophantus (210 – 290), Leonardo Fibonacci (1170 – 1250), Claude Gas pard Bachet de M´eziriac (1581 –1638), Pierre de Fermat (1601 – 1665), John Pell (1611 – 1685), Leonhard Euler (1707 – 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) [1].

Günümüzde çokça kullanılan ve çok iyi bilinen bazı matematiksel kavramların, teoremlerin ve yapıların arkasında figürsel sayılar bulunmaktadır. Özellikle figürsel sayılar, binom katsayıları, Pisagor üçlüleri, mükemmel sayılar, Mersenne ve Fermat sayıları, Fibonacci ve Lucas sayıları gibi diğer birçok özel pozitif tamsayı sınıfıyla ilişkilidir [1].

Günümüzde figürsel sayı, eşit aralıklı noktalardan oluşan düzenli ve ayrık geometrik desenle temsil edilebilen bir sayı olarak tanımlanır. Figürsel sayıların boyutlarına ve düzlemde aldığı farklı şekillere göre birçok çeşidi bulunmaktadır. Çokgensel sayılar, merkezcil çokgensel sayılar, L- şekilli sayılar, yamuksal sayılar, pronic sayılar, oblong sayılar, elmas sayılar, yıldız sayılar iki boyutlu figürsel sayılara örnek iken, piramitsel sayılar, kübik sayılar üç boyutlu (uzay) figürsel sayılarına örnek olarak verilebilir [1].

Bu tez de düzlemsel figürsel sayılardan olan çokgensel sayılar ve çokgensel sayıların bazı özellikleri ele alınacaktır.

Düzlem üzerinde bulunan noktalar, düzgün bir çokgen formunda düzenlenip belirli bir kural çerçevesinde oluşturulmuş ise bu tür noktalardan meydana gelmiş sayı dizisine çokgensel sayı dizisi denir.

Çokgensel sayılar ile ilgili çalışmalar, antik çağlara kadar uzanan çok eski bir tarihi geçmişe sahiptir. Çokgensel sayıların günümüz ile bağlantısı ise daha çok Pierre de Fermat'a dayanır. 1636 yılında Fermat, çokgensel sayılar ile ilgili ilginç bir problem ortaya attı ve yaklaşık 2 asırlık bir süre sonunda problem tam olarak çözülebildi. Fermat'ın iddia ettiği problem şu şekildedir: "*Her sayı en fazla* m *adet* m*- gensel sayının toplamı olarak ifade edilebilir*". Fermat'ın Mersenne'ye yazdığı bir mektupta bu iddiasını kanıtladığını yazmasına rağmen bu kanıta ait hiçbir iz bulunamadı. Fermat'ın bu iddiasının karesel sayılar için olan kısmı 1770 yılında Lagrange tarafından, üçgensel sayılar ile ilgili olan kısmı ise 1776 yılında Gauss tarafından ispatlandı. Nihayet, 1813 yılında Cauchy önermenin tüm çokgensel sayılar için doğru olduğunu kanıtladı [1].

Richard K. Guy tarafından 1994 yılında *"Her sayı, kaç adet çokgensel sayının toplamı olarak ifade edilebilir?"* sorusunun cevabı bulunmuştur [2].

Çokgensel sayıların ilk genel tanımı, M.Ö. II. yüzyılda İskenderiyeli Hypsicles tarafından verilmiştir. Hypsicles'in yapmış olduğu tanımın izlerini Diophantus'un "*Çokgensel Sayılar Üzerine*" adlı eserinde görmek mümkündür. Buna göre: "*Eğer yeterli miktarda sayı varsa ve bu sayılardan* 1 *sayısı ile başlayıp aynı ortak farkla* *artacak şekilde devam edilirse, ortak fark* 1 *olduğunda, tüm terimlerin toplamı bir üçgensel sayı; ortak fark 2 olduğunda bir karesel sayı; ortak fark 3 olduğunda, bir beşgensel sayı olarak isimlendirilir ve ortak farkı 2'den büyük olan durumlarda açı sayısı ile isimlendirilir.*" şeklinde ifade edilmiştir [3].

Kesirlerin kullanımları, toplumlar genişledikçe ve insan nüfusu çoğaldıkça insanların mal ve eşyalarını ölçme ihtiyacı artmasından dolayı artmıştır. M.Ö. III. yüzyılda yaşayan Öklid, iki sayının en büyük ortak bölenini bulmaya yarayan Öklid algoritmasını bulmuştur. M.S. 550 yıllarında Hindistanlı matematikçi Aryabhata lineer denklemleri çözmek için kesirleri kullanmıştır [4].

Sürekli kesirler, ilk defa John Wallis'in "*Arithmatica Infinitorum*" kitabında 1653 yılında tanımlanmıştır. Kitapta sürekli kesirlerin genelleştirilmesinden bahsedilmiştir. Wallis *"Opera Mathematica"* adında bir kitap daha yazmıştır. Bu kitapta da Wallis, bir reel sayının yakınsayanlarını ve bu yakınsayanların özelliklerini ele almıştır [4].

İtalya'da Rafael Bombelli ve Pietro Cataldi adlı matematikçiler 13'ün ve 18'in karekökü gibi tekrar eden sürekli kesirlerin üzerinde çalışmışlardır [4].

1737 yılında Leonard Euler her rasyonel sayının sonlu bir basit kesirle ifade edilebilir olduğunu kanıtlamıştır [4].

Langrange ise kuadratik bir irrasyonel sayının reel kökünün periyodik bir sürekli kesir olduğunu kanıtlamış ve sürekli kesirleri kullanarak Pell denklemi için genel çözüm bulmuştur [4].

Diophantine denklemleri ile ilgili ilk sistematik çalışmayı M.Ö. 325 yıllarında Roma'da yaşayan Yunan matematikçi Diophantus yapmıştır. Bu yüzden bu denklemlere kendi adıyla anılan Diophantine denklemleri adı verilmiştir [5].

Diophantus, kökleri tamsayılar olan denklemlerin çözümü üzerinde çalışmıştır. Bu denklemler yüzyıllarca matematikçilerin ilgi alanina girmiş ve birçok sayıda çalışmalar yapılmıştır [6].

Diophant denklemlerin özel hali olan Pell denklemleri (John Pell; 1611-1676), sayılar teorisi ve matematiğin diğer uygulama alanlarında önemli bir yere sahiptir [6]. Pell denklemleri üzerinde, Hintli astronom ve matematikçi Brahmagupta (M.S. 598-670) yıllarında derinlemesine çalışma yapan ilk kişidir. Teoremlerinde *"Pell denklemlerinin bir çözümü varsa sonsuz çözümü vardır."* yargısına ulaşmıştır [6].

Brahmagupta'dan sonra Hintli matematikçi ve astronom Bhaskara II (M.S. 1150) yılında Pell denklemleri üzerinde çalışmıştır. Daha sonra Narayana, Bhaskara'nın geliştirdiği metoda yeni örnekler sunmuştur [6].

Pell denklemleri, Fermat'ın yayınladığı teoremlerle sayılar teorisinde ilgi odağı olmuştur. Fermat'ın 1657 yılında yayınladığı $d \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $dy^2 + 1$'in tamkare olmasını sağlayan y tamsayılarının bulunuşu problemine birçok matematikçi çözüm üretmeye çalışmıştır [6].

John Pell cebirsel çalışmalar yapmış, özelikle denklemler ve matematiksel tablolar konularına yoğunlaşmıştır. İsviçreli matematikçi Johann Heinrich Rahn (1622-1676) 1659 yılında *"Teutsche Algebra"* adlı bir kitap yayınlamıştır. Bu kitabın 1668 yılında John Pell tarafından düzeltilmiş yeni bir baskısı yayınlanmıştır [7]. Pell denklemlerine ismi verilen John Pell'in bu denklemlere ait tek çalışmasının bu kitapta olduğu bilinmektedir. Euler, bu denklemler üzerine çalışma yapan ilk kişi John Pell olmamasına rağmen onun ismini vererek Pell denklemleri olarak anılmasına neden olmuştur [6].

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci (1170-1250) tarafından kendi adıyla anılan Fibonacci sayı dizisi tanımlanmıştır. Fibonacci 1202 yılında *"Liber Abaci (Abaküs Kitabı)"* adlı kitabını yayınlamıştır. Daha sonra kitabın ikinci baskısında tavşan problemini tanımlamış ve Fibonacci sayı dizisinin temelini atmıştır [8]. Fibonacci dizisi, ilk iki terimi dışında diğer tüm terimleri kendisinden önce gelen ilk iki teriminin toplamı olarak yazılabilen sayı dizisidir. Zamanla Fibonacci sayı dizisi üzerine yapılan çalışmalar artmış ve Fibonacci Derneği kurulmuştur. 1963 yılından itibaren "The Fibonacci Quarterly" adlı dergide, bu sayı dizisi ile ilgili yapılan çalışmalar yayınlanmaya başlamıştır [9].

BÖLÜM 2

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılacak düzgün çokgensel sayılar, sürekli kesirler ve Diophantine denklemler ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

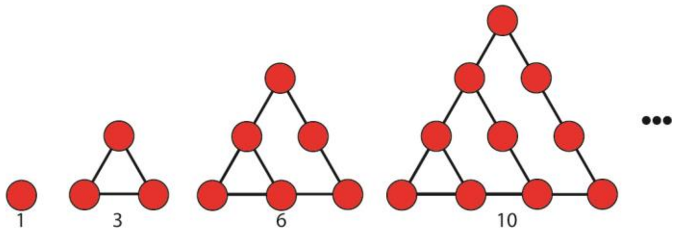
2.1. Figürsel Sayılar

Figürsel sayılar, çeşitli, düzenli ve kesikli geometrik desenlerde noktalarla temsil edilebilen sayılardır. Bu sayılar n boyutlu uzayda yer alabilirler. Düzlemde ($\mathbb{R}^2$) tanımlanan figürsel sayılara *çokgensel sayılar*, uzayda ($\mathbb{R}^3$) tanımlanan figürsel sayılara *piramitsel sayılar* denir.

2.1.1. Çokgensel Sayılar

Düzlemde bir adet nokta olsun. Bu bir adet noktadan en küçük boyutta bir düzgün çokgen (eşkenar üçgen) elde etmek için iki adet daha noktaya ihtiyaç duyulur. Var olan bir noktaya iki adet nokta ilave edilir ve bu noktalar bir eşkenar üçgen formunda düzenlenirse en küçük boyutta bir düzgün çokgen oluşturulmuş olur. Oluşan bu üç noktalı eşkenar üçgene, üç nokta daha eklenir ve tekrar bir eşkenar üçgen formunda ayarlanırsa daha büyük boyutta ve altı noktadan meydana gelmiş bir düzgün çokgen (eşkenar üçgen) oluşur. İnşa süreci bu şekilde devam eder ve her defasında daha büyük boyutta bir düzgün çokgen elde edebilmek için sırasıyla dört, beş, altı, … nokta ilave edilir ve her defasında bu noktalar bir eşkenar üçgen formunda düzenlenir [1]. Bu işlem ile düzlemde çokgensel (üçgensel) sayılar elde edilmiş olur.

Tanım 2.1. Başlangıçta alınan bir noktaya, sırasıyla $2,3,4,\ldots,$ nokta ilave edilir, aralarında fark her zaman 1 olacak şekilde her defasında daha büyük bir eşkenar üçgen elde edilir (Şekil 1). Böylece terimleri $1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,\ldots$ olan sayı dizisi çıkar. Oluşan bu sayı dizisine *üçgensel sayı dizisi* denir [10].



Şekil 1. Üçgensel Sayılar

Bu sayı dizisi matematiksel olarak ifade edilecek olursa, üçgensel sayı dizisinin terimleri

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2.1}$$

eşitliği (ardışık doğal sayıların toplamı) ile ifade edilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_3(n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S_3(n)$	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

Tablo 1. Üçgensel Sayılar

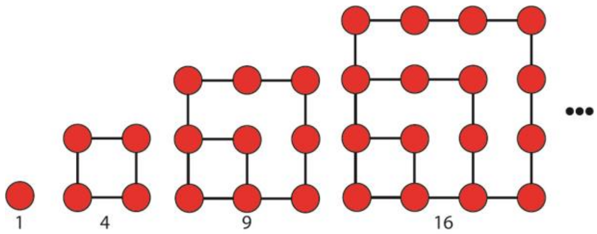
Bu toplama özel olarak “matematikçilerin prensi” ünvanıyla bilinen Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss’a ithaf edilerek *“Gauss toplamı”* da denir. Efsaneye göre Gauss 10 yaşında bir ilkokul öğrencisi iken öğretmeni sınıfta uğraşmaları için bir ödev verir. Ödev, 1’den 100’e kadar olan tam sayıların toplanmasıdır. Aradan geçen çok kısa bir sürede Gauss ödevini tamamlayarak toplam sonucu 5050 olarak bulmuş ve öğretmenini şaşırtmıştır [1, 11].

Gauss bu toplamın sonucunu bulurken şu şekilde bir yol izlemiştir: 1’den 100’e kadar olan sayıları toplamak yerine ilk ve son terimleri toplayarak sonucu $101\ (1+100=101)$ olarak bulmuştur. Ardından ikinci ve sondan ikinci terimi topladığında sonucu tekrar

$101\left(2+99=101\right)$ olarak bulmuştur. Bu şekilde devam ederek her defasında baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin toplamlarının sonucunu 101 olarak bulmuştur. Bu şekilde 50 tane sayı çifti olduğunu ve dolayısıyla toplamın sonucunun $101\times 50=5050$ 'e eşit olacağını söylemiştir [1].

Karesel sayı dizisi de üçgensel sayı dizisine benzer bir şekilde elde edilir. Düzlemde sabit bir nokta ile başlar. Bu noktaya önce üç nokta ilave edilir ve bu noktalar bir kare formunda düzenlenirse dört noktadan oluşan bir kare elde edilir (Şekil 2). Daha sonra bu dört noktalı kareye beş nokta ilave edilir ve bu noktalar daha büyük boyutta bir kare olacak şekilde düzenlenirse, dokuz noktadan oluşan bir kare elde edilir ve bu şekilde devam edilerek her defasında daha büyük boyutta bir kare inşa edilmiş olur [1].

Tanım 2.2. Başlangıçta bir nokta alınır ve bu noktaya, sırasıyla $3,\ 5,\ 7,\ldots$ noktalar ilave edilir. Eklenen bu sayıların arasındaki fark sürekli 2 olacak biçimde her defasında daha büyük bir kare elde edilir. Böylece terimleri $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ \ldots$ olan bir pozitif tam sayı dizisi meydana gelir. Oluşan bu sayı dizisine *karesel sayı dizisi* denir [10].



Şekil 2. Karesel Sayılar

Bu sayı dizisi matematiksel olarak ifade edilecek olursa, karesel sayı dizisinin terimleri

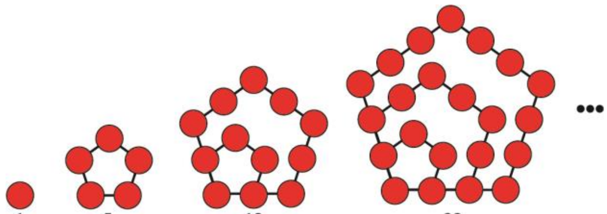
$$1+3+5+\ldots+\left(2n-1\right)=n^2 \tag{2.2}$$

eşitliği (ardışık tek doğal sayıların toplamı) ile ifade edilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_4(n)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S_4(n)$	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

Tablo 2. Karesel Sayılar

Tanım 2.3. Düzlemde sabit bir adet noktaya sırasıyla $4, 7, 10, \ldots$ adet noktalar ilave edilir (Şekil 3). Eklenen bu noktalar arasındaki fark hep 3 olacak şekilde her defasında daha büyük boyutta düzgün beşgen formunda düzenlenirse, terimleri $1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, \ldots$ sayı dizisi elde edilir. Bu sayı dizisine beşgensel sayı dizisi denir [10].



Şekil 3. Beşgensel Sayılar

Bu sayı dizisi matematiksel olarak ifade edilecek olursa, beşgensel sayı dizisinin terimleri

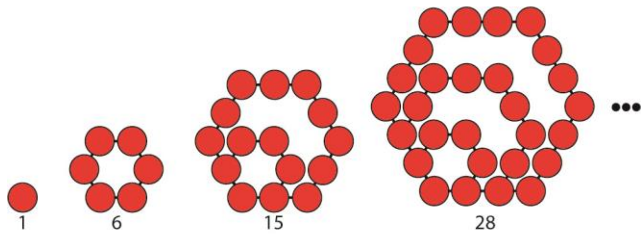
$$1+4+7+\ldots+3n-2=\frac{n(3n-1)}{2} \qquad (2.3)$$

eşitliği ile ifade edilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_5(n)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S_5(n)$	176	210	247	287	330	376	425	477	532	590

Tablo 3. Beşgensel Sayılar

Tanım 2.4. Düzlemde sabit bir adet noktaya sırasıyla $5,\ 9,\ 13,\ldots$ noktalar ilave edilir (Şekil 4). Eklenen bu noktalar aralarındaki fark hep 4 olacak şekilde ve her defasında daha büyük boyutta düzgün altıgen formunda düzenlenirse, terimleri sırasıyla $1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,\ldots$ sayı dizisi oluşur. Oluşan bu sayı dizisine *altıgensel sayı dizisi* denir [10].



Şekil 4. Altıgensel Sayılar

Bu sayı dizisi matematiksel olarak ifade edilecek olursa, altıgensel sayı dizisinin terimleri

$$1+5+9+\ldots+4n-3=n(2n-1) \tag{2.4}$$

eşitliği ile ifade edilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_6(n)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S_6(n)$	231	276	325	378	435	496	561	630	703	780

Tablo 4. Altıgensel Sayılar

Çokgensel sayıların en basit birkaç sınıfını oluşturduk. Düzgün bir çokgen oluşturan düzlemdeki noktaların bir düzenlemesine karşılık gelen pozitif tamsayılar, düzenli bir çokgen oluşturuyorsa, çokgensel sayılardan söz edilir [1].

Sonuç 2.1. Bir nokta ile başlayıp aynı ortak farkla artan, ortak fark 1 olduğunda, tüm terimlerin toplamı bir üçgensel sayı; 2 olduğunda, bir karesel sayı; 3 olduğunda, bir beşgensel sayıyı verir [3].

Tanım 2.5. $n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere n . m - gensel sayı dizisinin ilk n terimi $1,\ 1+(m-2),\ 1+2(m-2),\ 1+3(m-2),\ \ldots,\ 1+(n-1)(m-2)$ 'dir [1].

Tanım 2.6. $n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 3$ bir tam sayı olmak üzere n inci m -gensel sayı

$$S_m(n) := \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$$

dir [1].

$S_m(n)$, ilk n terimi $1,\ 1+(m-2),\ 1+2(m-2),\ 1+3(m-2),\ \ldots,\ 1+(n-1)(m-2)$ olan sayı dizisinin toplamına eşittir [12].

$$\begin{aligned} S_m(n) &= 1+\left(1+(m-2)\right)+\left(1+2(m-2)\right)+\left(1+3(m-2)\right)+\ldots+\left(1+(n-1)(m-2)\right) \\ &= \frac{(m-2)\left(n^2-n\right)+2n}{2} \\ &= \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2} \end{aligned}$$

dir [12].

Örnek 2.1. Özel olarak, $m = 3,\ 4,\ \ldots,\ 8$ için n . m -gensel sayılar aşağıdaki gibidir.

$$S_3(n) = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n.(n+1)}{2},$$
$$S_4(n) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2,$$
$$S_5(n) = 1+4+7+\ldots+(3n-2) = \frac{n.(3n-1)}{2},$$
$$S_6(n) = 1+5+9+\ldots+(4n-3) = n(2n-1),$$
$$S_7(n) = 1+6+11+\ldots+(5n-4) = \frac{n.(5n-3)}{2},$$
$$S_8(n) = 1+7+13+\ldots+(6n-5) = n.(4n-2)$$

dir [1, 12].

Tanım 2.7. Herhangi bir terimi verilen dizinin, bir sonraki terimini bulabilmek için dizinin önceki terimlerinden yararlanılarak bir hesaplama yapılabiliyorsa, bu diziye *indirgeme (recurrent, tekrarlama) dizisi* denir. İstenilen terimi bulmak için kullanılan bağıntıya ise indirgeme bağıntısı adı verilir [11, 13, 14].

Çokgensel sayılar arasında indirgeme bağıntısı;

$$S_m(n+1) = S_m(n) + \big(1 + (m-2)n\big),\ S_m(1) = 1$$

dir [1].

Örnek 2.2. Özel olarak $m = 3,4,5,\ldots,7$ için n. m-gensel sayılar için oluşturulan indirgeme bağıntıları aşağıdaki gibidir.

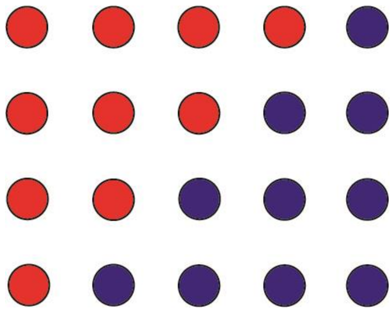
$$S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1),$$
$$S_4(n+1) = S_4(n) + (2n+1),$$
$$S_5(n+1) = S_5(n) + (3n+1),$$
$$S_6(n+1) = S_6(n) + (4n+1),$$
$$S_7(n+1) = S_7(n) + (5n+1),$$

dir [1].

Örnek 2.3. n. $m-$gensel sayı dizilerinin genel terimini bulmanın birçok yöntemi vardır. Özel olarak *m=3* için, üçgensel sayı dizisinin genel terimi olan $S_3(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ olduğu farklı yöntemler ile ispatlanabilir. Bu yöntemlerden bazıları şu şekildedir:

Geometrik İllüstrasyon ile İspat:

Buna göre, üçgensel sayıların genel terimi $S_3(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ olduğundan bir kenarı n ve $n+1$ olan dikdörtgenin alanının yarısı olarak düşünülebilir. Burada özel olarak $n = 4$ alınırsa kenarları 4 ve 5 birim olan bir dikdörtgene dönüşür (Şekil 5).



Şekil 5. Üçgensel + Üçgensel ($10+10=20$)

Şekil 5'teki dikdörtgen toplamda 20 adet noktadan meydana gelir ve buradan iki üçgensel sayının toplamı olduğunu görmek mümkündür. ■

Tümevarım ile İspat:

- İlk olarak önermenin $n=1$ için doğru olduğu gösterilir.

  $S_3(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$ olduğundan önerme $n=1$ için doğrudur.

- İkinci adımda ise önermenin n için doğru olduğu kabul edilir.

  Yani, $S_3(n)=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ eşitliği doğru olsun.

- Üçüncü ve son adımda ise önermenin $n+1$ için de doğru olduğu gösterilir.
  Bunu göstermek için Örnek 2.2. de verilen indirgeme bağıntılarından yararlanılır.
  $S_3(n+1)=S_3(n)+(n+1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} S_3(n+1) &= S_3(n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

bulunur ve böylece tümevarımla eşitliğin doğru olduğu gösterilmiş olur.

■

Gauss Metodu ile İspat:

Üçgensel sayı dizisinin terimleri önce normal sırada daha sonra tersten sıralanır ve dizinin terimleri alt alta toplanır.

$$
\begin{array}{rrl}
 & S_3(n) = & 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + \quad n \\
+ & S_3(n) = & n \quad + (n-1) + (n-2) + \ldots + \quad 1 \\
\hline
 & 2S_3(n) = & \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n \text{ tane}}
\end{array}
$$

olur. Buradan $2S_3(n) = n.(n+1)$ ve sonuç olarak $S_3(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ bulunur.

■

Polinom Yöntemi ile İspat:

İkinci dereceden polinomların katsayılarından yararlanılarak genel terimi bulma yöntemidir. Üçgensel sayılar dizisinin genel terimi ikinci dereceden bir polinom olduğundan dizinin bilinen ilk üç teriminden yararlanılır.

Buna göre, katsayıları *A, B* ve *C* olan ikinci dereceden polinom $An^2 + Bn + C$ olsun. Dizinin ilk üç terimi $S_3(1) = 1$, $S_3(2) = 3$ ve $S_3(3) = 6$ olduğu bilinmektedir. $An^2 + Bn + C$ polinomunda sırasıyla $n = 1$ için $A + B + C = 1$, $n = 2$ için $4A + 2B + C = 3$ ve $n = 3$ için $9A + 3B + C = 6$ dır.

Elde edilen üç denklem çözülürse $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{2}$ ve $C = 0$ bulunur. Bu değerler $An^2 + Bn + C$ polinomunda yerine yazılırsa $\dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n == \dfrac{n(n+1)}{2}$ bulunur. Bu da üçgensel sayı dizisinin genel terimidir.

■

2.1.2. Figürsel Sayıların Bazı Temel Özellikleri

Teorem 2.1. (Nicomachus Teoremi) Herhangi bir figürsel sayı, aynı sırada yer alan ve bir önceki isim ile anılan figürsel sayı ile bir önceki sırada yer alan üçgensel sayının toplamına eşittir [15]. Bir başka ifadeyle n . m - gensel sayı ile n. $(m-1)$ - gensel sayı arasındaki fark $(n-1)$. üçgensel sayıya eşittir.

$$S_m(n) = S_{m-1}(n) + S_3(n-1) \tag{2.5}$$

Teorem 2.2. (Bachet de Meziriac Teoremi) Herhangi bir çokgensel sayı, aynı sırada yer alan bir üçgensel sayı ve 3 önceki üçgensel sayının toplamına eşittir [16].

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1) \tag{2.6}$$

2.1.3. Çokgensel Sayıların Bazı Temel Özellikleri

Bu bölümde yukarıda anlatılan tanımlardan yola çıkarak, çokgensel sayıların temel özellikleri ve teoremleri verilecektir. İspatlar çeşitli metotlar (görsel, tümevarım, gauss toplamı yöntemi) ile verilecektir.
Küçük indisli üçgensel sayıları kullanarak daha büyük indisli üçgensel sayılar elde edilebilir.

Teorem 2.3. (Theon Teoremi) Ardışık iki üçgensel sayının toplamı bir karesel sayıdır [1].

$$S_3(n) + S_3(n-1) = S_4(n) \tag{2.7}$$

Teorem 2.4. Çift indisli üçgensel sayılar için,

$$S_3(2n) = 3S_3(n) + S_3(n-1) \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.5. Tek indisli üçgensel sayıları için,

$$S_3(2n+1) = 3S_3(n) + S_3(n+1) \tag{2.9}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.6. Üçgensel sayıları için,

$$S_3(3n-1)=3S_3(n)+6S_3(n-1) \tag{2.10}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.7. (Plutarch teoremi) Karesel ve üçgensel sayılar için,

$$S_4(2n+1)=8S_3(n)+1 \tag{2.11}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.8. Çift (veya tek) indisli iki üçgensel sayı için aşağıdaki eşitlik

$$S_3(n-1)+S_3(n+1)=2S_3(n)+1 \tag{2.12}$$

sağlanır [1].

Teorem 2.9. Beşgensel, karesel ve üçgensel sayılar için,

$$S_5(n)=S_4(n)+S_3(n-1) \tag{2.13}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.10. Beşgensel ve üçgensel sayılar için,

$$S_5(n)=2S_3(n-1)+S_3(n) \tag{2.14}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.11. Üçgensel sayılarla altıgensel sayılar için aşağıdaki eşitlik

$$S_6(n)=S_3(n)+3S_3(n-1) \tag{2.15}$$

sağlanır [1].

Teorem 2.12. Her altıgensel sayı bir üçgensel sayıdır [1].

$$S_6(n)=S_3(2n-1) \tag{2.16}$$

2.2. Sürekli Kesirler

Bu bölümde sürekli kesirler ile ilgili bazı temel kavramlar verilecek olup, rasyonel ve irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımları gösterilecektir.

Tanım 2.8. $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ ve $b_{0,} b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\vdots}}}} \qquad (2.17)$$

şeklinde yazılan kesirlere *sürekli kesir* denir [17].

Tanım 2.9. Tanım 2.8'de $a_0 \in \mathbb{Z}$ ve $b_i = 1$ için a_i doğal sayı oluyorsa bu kesrilere *basit sürekli kesir* denir [17].

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}} \qquad (2.18)$$

şeklindedir ve $\left[a_0; a_1, a_2, a_{3,\ldots}\right]$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. Basit sürekli kesir sonlu sayıda terim içeriyorsa *sonlu basit sürekli kesir* denir [17].

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \qquad (2.19)$$

şeklindedir ve $\left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n\right]$ ile gösterilir.

Tanım 2.11. Basit sürekli kesir sonsuz terim içeriyorsa *sonsuz basit sürekli kesir* denir [17].

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\vdots}}}} \tag{2.20}$$

şeklindedir ve $[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ ile gösterilir.

Örnek 2.4. Sonlu basit sürekli kesir olan $[1;1,4,5,2]$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}$$

ile gösterilir.

Örnek 2.5. Sonsuz basit sürekli kesir olan $[1;5,5,5,\ldots]$

$$1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\vdots}}}}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.12. Sonsuz basit sürekli bir kesir belli bir terimden sonra kendini tekrar eden terimlerden oluşuyorsa bu kesire *periyodik sürekli kesir* denir [17].

Örnek 2.6. $[3;7,2,4,2,4,\ldots]=[3;7,\overline{2,4}]$ sürekli kesri periyodu 2 olan bir periyodik sürekli kesirdir.

2.2.1. Rasyonel Sayıların Sürekli Kesirlerle Gösterilmesi

Bir rasyonel sayının sürekli kesir olarak nasıl yazılacağını aşağıdaki örneklerle gösterilecektir.

Tanım 2.13. $b_0,\, b_1 > 0$ birer tam sayı ve $(b_0, b_1) = 1$ olmak üzere $\alpha = \dfrac{b_0}{b_1}$ olsun. Bölüm algoritması art arda uygulanarak

$$\begin{array}{ll} b_0 = q_0 b_1 + b_2, & 0 < b_2 < b_1 \\ b_1 = q_1 b_2 + b_3, & 0 < b_3 < b_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ b_{j-1} = q_{j-1} b_j + b_{j+1}, & 0 < b_{j+1} < b_j \\ b_j = q_j b_{j+1} + 0 & \end{array} \tag{2.21}$$

eşitlikler elde edilir. Bu eşitlikler

$$\begin{array}{l} \dfrac{b_0}{b_1} = q_0 + \dfrac{b_2}{b_1} \\ \dfrac{b_1}{b_2} = q_1 + \dfrac{b_3}{b_2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dfrac{b_{j-1}}{b_j} = q_{j-1} + \dfrac{b_{j+1}}{b_j} \\ \dfrac{b_j}{b_j + 1} = q_j \end{array} \tag{2.22}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan;

$$\frac{b_0}{b_1} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b_1}{b_2}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{b_3}{b_2}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b_2}{b_3}}} \tag{2.23}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse;

$$\frac{b_0}{b_1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{q_{j-1} + \cfrac{1}{q_j}}}} \tag{2.24}$$

elde edilir. Burada q_0 negatif, sıfır ya da pozitif tam sayı olabilir. Fakat her $i \geq 1$ için $q_i \geq 1$ dir. Böylece $\frac{b_0}{b_1}$ nin *sürekli kesir açılımı (gösterimi)* denir [18].

Örnek 2.7. $\frac{83}{38}$ rasyonel sayısının sürekli kesir gösterimi,

$$\begin{aligned}
\frac{83}{38} &= 2 + \frac{7}{38} \\
&= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{38}{7}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{3}{7}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\frac{83}{38} = [2;5,2,3]$ olarak ifade edilir. Bu değerler Öklid algoritması ile bulunan değerler ile aynıdır. $\frac{83}{38}$ rasyonel sayısına Öklid algoritması uygulanırsa**,**

$$\begin{aligned}
83 &= 38.2 + 7 \\
38 &= 7.5 + 3 \\
7 &= 3.2 + 1 \\
3 &= 1.3 + 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Rasyonel sayıların sürekli kesir biçiminde yazılışı tek türlü değildir.

$a_n = (a_n - 1) + 1/1$

eşitliği göz önüne alınırsa, $a_n > 1$ olan sürekli kesri,

$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$

biçiminde yazmak mümkündür. Bu da her rasyonel sayı iki farklı biçimde sürekli kesre sahip olduğu anlama gelir. Bunların birinde terimlerin sayısı tek, diğerinde çift sayıdır.

2.2.2. İrrasyonel Sayıların Sürekli Kesirlerle Gösterilmesi

Tanım 2.14. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $a_0 = \lfloor x \rfloor$, x 'den küçük ya da x'e eşit en büyük tamsayı ve $x_0 = x$ olsun.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{x_0 - a_0}, a_1 = \lfloor x_1 \rfloor \\
x_2 &= \frac{1}{x_1 - a_1}, a_2 = \lfloor x_2 \rfloor \\
x_3 &= \frac{1}{x_2 - a_2}, a_3 = \lfloor x_3 \rfloor \\
&\vdots \\
x_{i+1} &= \frac{1}{x_i - a_i}, a_{i+1} = \lfloor x_{i+1} \rfloor
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

dir [19].

Örnek 2.8. $\sqrt{2}$ sayısının sürekli kesir açılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$$x_0 = \sqrt{2}, \quad a_0 = \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \quad a_1 = \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \quad a_2 = \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2,$$

$$\vdots$$

elde edilir. $\sqrt{2}$ sayısının sürekli kesir açılımı hem sonsuz hemde periyodiktir.

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\vdots}}}$$

ve $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots] = \left[1; \overline{2}\right]$ ile gösterilir.

Örnek 2.9. $\sqrt{3}$ sayısının sürekli kesir açılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$$x_0 = \sqrt{3}, \quad a_0 = \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor = 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad a_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1,$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1, \quad a_2 = \left\lfloor \sqrt{3}+1 \right\rfloor = 2,$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad a_3 = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1,$$

$$\vdots$$

elde edilir. Buradan

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\vdots}}}}$$

elde edilir ve $\sqrt{3}=\left[1;1,2,1,2,\dots\right]=\left[1;\overline{1,2}\right]$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. $i\le n$ olmak üzere $\left[a_0;a_1,a_2,\dots,a_n\right]$ sürekli kesiri, $\left[a_0;a_1,a_2,\dots a_i\right]$sürekli kesrinin i.ci terimine kadar alınırsa, bu ifadeye sürekli kesirin $i.$ *yakınsayanı* denir [19]. Bir $\dfrac{p}{q}$ rasyonel sayısının $i.$ yakınsayanı $C_i=\dfrac{p_i}{q_i}$ ile gösterilir [19].

Örnek 2.10. $\dfrac{263}{83}=\left[3;4,2,1,2,2\right]$ sürekli kesrinin yakınsayanları,

$$C_0=\left[3\right]=3,$$

$$C_1=\left[3;4\right]=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4},$$

$$C_2=\left[3;4,2\right]=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}=\frac{29}{9},$$

$$C_3=\left[3;4,2,1\right]=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}=\frac{42}{13},$$

$$C_4=\left[3;4,2,1,2\right]=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{113}{35},$$

$$C_5=\left[3;4,2,1,2,2\right]=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}=\frac{268}{83}$$

şeklindedir. Örnekte de ifade edildiği gibi sayının her yakınsayanı, kendisine bir önceki yakınsayandan daha yakındır [4].

Teorem 2.13. $\left[a_0;a_1,a_2,\dots a_n\right]$ sürekli kesrinin $C_i=\dfrac{p_i}{q_i}$ yakınsakları,

$$p_i=a_ip_{i-1}+p_{i-2} \text{ ve } q_i=a_iq_{i-1}+q_{i-2} \tag{2.26}$$

dir. Burada, $p_0 = a_0$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$'dir [19].

İspat: Tümevarımla ispat edilecek olursa,

- $i = 0$ için $C_0 = [a_0] = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_0}{q_0}$
- $i = 1$ için $C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{p_1}{q_1}$

$i \geq 2$ için $C_i = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i] = \dfrac{p_i}{q_i} = \dfrac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}$ olduğunu kabul edelim.

- $i + 1$ için

$$
\begin{aligned}
C_{i+1} &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}] \\
&= \left[a_0, a_1, a_2, \dots a_{i-1}, a_i + \frac{1}{a_{i+1}} \right] \\
&= \frac{\left(a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}} \right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}} \right) q_{i-1} + q_{i-2}} \\
&= \frac{a_{i+1}\left(a_i p_{i-1} + p_{i-2} \right) + p_{i-1}}{a_{i+1}\left(a_i q_{i-1} + q_{i-2} \right) + q_{i-1}} \\
&= \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} q_i + q_{i-1}} \\
&= \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

■

Örnek 2.11. $\dfrac{361}{81} = [4; 2, 5, 3, 2]$ sürekli kesirinin yakınsayanlarını Teorem 2.13. kullanarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$C_0=\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1}=\frac{4}{1}=4$$
$$C_1=\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}=\frac{4.2+1}{2}=\frac{9}{2}$$
$$C_2=\frac{p_2}{q_2}=\frac{a_2p_1+p_0}{a_2q_1+q_0}=\frac{5.9+4}{5.2+1}=\frac{49}{11}$$
$$C_3=\frac{p_3}{q_3}=\frac{a_3p_2+p_1}{a_3q_2+q_1}=\frac{3.49+9}{3.11+2}=\frac{156}{35}$$
$$C_4=\frac{p_4}{q_4}=\frac{a_4p_3+p_2}{a_4q_3+q_2}=\frac{2.156+49}{2.35+11}=\frac{361}{81}$$

Teorem 2.14. $1\le i\le n$ için

$$p_iq_{i-1}-p_{i-1}q_i=(-1)^{i-1} \tag{2.27}$$

dir [19].

İspat: Tümevarımla ispatı yapılacak olursa,

- $i=1$ için $p_1q_0-p_0q_1=(a_0a_1+1).1-a_0a_1=1$ doğrudur.
- i için doğru olduğunu kabul edilir. $p_iq_{i-1}-p_{i-1}q_i=(-1)^{i-1}$
- $i+1$ için

$$\begin{aligned}p_{i+1}q_i-p_iq_{i+1}&=(a_{i+1}p_i+p_{i-1})q_i-p_i(a_{i+1}q_i+q_{i-1})\\&=p_{i-1}q_i-p_iq_{i-1}\\&=-(-1)^{k-1}=(-1)^k\end{aligned}$$

elde edilir.

■

Teorem 2.15. $[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n]$ sürekli kesri için $C_i=\dfrac{p_i}{q_i}$ ise p_i ve q_i tamsayıları aralarında asaldır [20].

İspat: p_i ve q_i aralarında asal ise $d=(p_i,q_i)=1$ olmalıdır. O halde $d\,|\,p_i$ ve $d\,|\,q_i$ olur. Teorem 2.14'den $p_iq_{i-1}-p_{i-1}q_i=(-1)^{i-1}$'dir. Buradan $d\,|\,p_i\,q_{i-1}$ ve $d\,|\,p_{i-1}\,q_i$ den

$d \mid p_i\, q_{i-1} - p_{i-1} q_i$ ve $d \left| (-1)^{i-1} \right.$ elde edilir. Bu ise $d = 1$ demektir.

■

Sonuç 2.2. $C_i = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \dfrac{p_i}{q_i}$ sürekli kesri için aşağıdaki ifadeler sağlanır [19].

a. $1 \le i \le n$ için $C_i - C_{i-1} = \dfrac{(-1)^{i-1}}{q_i - q_{i-1}}$

b. $2 \le i \le n$ için $C_i - C_{i-2} = \dfrac{a_i (-1)^i}{q_i q_{i-2}}$

c. $C_1 \rangle C_3 \rangle C_5 \rangle \ldots \rangle C_4 \rangle C_2 \rangle C_0$

d. Her tek sayılı yakınsayan, çift sayılı yakınsayandan büyüktür.

İspat:

a. $1 \le i \le n$ için

$$
\begin{aligned}
C_i - C_{i-1} &= \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \\
&= \frac{p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i}{q_i q_{i-1}} \\
&= \frac{(-1)^{i-1}}{q_i q_{i-1}}
\end{aligned}
$$

b. $2 \le i \le n$ için

$$
\begin{aligned}
C_i - C_{i-2} &= \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} \\
&= \frac{p_i q_{i-2} - p_{i-2} q_i}{q_i q_{i-2}} \\
&= \frac{(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) q_{i-2} - p_{i-2} (a_i q_{i-1} + q_{i-2})}{q_i q_{i-2}} \\
&= \frac{a_i (p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1})}{q_i q_{i-2}} \\
&= \frac{a_i (-1)^{i-2}}{q_i q_{i-2}}
\end{aligned}
$$

c. $C_i - C_{i-2} = \dfrac{(-1)^i}{q_i q_{i-2}}$ ‘den i tek sayı olduğunda, $q_i,\ i \geq 0$ için pozitif olur. $C_i - C_{i-2}$’ nin işareti $(-1)^i$ ile aynı olur. Sonuç olarak $C_i \langle C_{i-2}$’dir. $C_1 \rangle C_3 \rangle C_5 \rangle \ldots$ i çift sayı olduğunda, $q_i, i \geq 0$ için pozitif olur. $C_i \rangle C_{i-2}$ elde edilir. Buradan, $C_0 \langle C_2 \langle C_4 \ldots$’dir.

d. $1 \leq r$ için $C_{2r} - C_{2r-1} = \dfrac{(-1)^{2r-1}}{q_{2r} q_{2r-1}} \langle 0$ elde edilir. Buradan $C_{2r-1} \rangle C_{2r}$ olur.

2.3. Diophantine Denklemler

Tanım 2.16. Katsayıları ve çözümleri tamsayılar olan polinom biçimindeki denklemlere *Diophantine denklemler* denir [21].

Tanım 2.17. $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $ax + by = c$ şeklinde olan denklemlere *lineer Diophantine denklemler* denir [22].

Teorem 2.16. $(a,b) = 1$ ve $ax + by + c = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü,

$$x_0 = (-1)^n c\, q_{n-1} \text{ ve } y_0 = (-1)^{n+1} c\, p_{n-1} \tag{2.28}$$

dir [20].

İspat; $\dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısının değeri n. yakınsayana eşittir, yani $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p_n}{q_n}$’dir.

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Bu durumda, $\dfrac{a}{b} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ elde edilir. Burada payda eşitlenirse,

$$\frac{aq_{n-1} - bp_{n-1}}{bq_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \text{ ve } aq_{n-1} - bp_{n-1} + (-1)^n = 0$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $c(-1)^n$ ile çarpılırsa,

$$aq_{n-1}c(-1)^n - bp_{n-1}c(-1)^n + c = 0 \Rightarrow a\underbrace{\left[(-1)^n cq_{n-1}\right]}_{x} + b\underbrace{\left[(-1)^{n+1} cp_{n-1}\right]}_{y} + c = 0$$

$$\Rightarrow ax + by = 0$$

elde edilir. Böylece $ax + by + c = 0$ denkleminin çözümleri

$x = (-1)^n cq_{n-1}$ ve $y = (-1)^{n+1} cp_{n-1}$

olur.

Örnek 2.12. $227x + 89y - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi, $(227,89) = 1$ 'dir ve $\dfrac{227}{89}$ kesrinin sürekli kesir açılımı $[2;1,1,4,2,4]$ şeklindedir.

$$p_0 = a_0 = 2$$
$$q_0 = 1$$

$$p_1 = a_0.a_1 + 1 \qquad q_1 = a_1 = 1$$
$$p_1 = 2.1 + 1$$
$$p_1 = 3$$

$$p_2 = a_2.p_1 + p_0 \qquad q_2 = a_2 q_1 + q_0$$
$$p_2 = 1.3 + 2 \qquad q_2 = 1.1 + 1$$
$$p_2 = 5 \qquad q_2 = 2$$

$$p_3 = a_3.p_2 + p_1 \qquad q_3 = a_3.q_2 + q_1$$
$$p_3 = 4.5 + 3 \qquad q_3 = 4.2 + 1$$
$$p_3 = 23 \qquad q_3 = 9$$

$$p_4 = a_4.p_3 + p_2 \qquad q_4 = a_4.q_3 + q_2$$
$$p_4 = 2.23 + 5 \qquad q_4 = 2.9 + 2$$
$$p_4 = 51 \qquad q_4 = 20$$

$$x = (-1)^n cq_{n-1} \qquad y = (-1)^{n+1} cp_{n-1}$$
$$x = (-1)^5 (-2) q_4 \qquad y = (-1)^6 (-2) p_4$$
$$x = 2.20 \qquad y = (-2).51$$
$$x = 40 \qquad y = -102$$

olarak bulunur.

2.3.1. Pell Denklemleri

Bu bölümde Diophantine denklemlerin özel hali olan Pell denklemlerinin tanımı ve çözümleri ile ilgili bilgi verilecektir.

Tanım 2.18. d tam kare olmayan pozitif bir tam sayı ve $N \neq 0$ olan bir tamsayı olmak üzere,

$$x^2 - dy^2 = N \tag{2.29}$$

Diophant denklemine *genel Pell denklemi* denir [23].

Tanım 2.19. d tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$x^2 - dy^2 = \mp 1 \tag{2.30}$$

Diophant denklemine *klasik Pell denklemi* denir [23].

Teorem 2.17. d tam kare olmayan pozitif bir tamsayı ve $\frac{p_k}{q_k}$ 'da $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesir açılımında k. yakınsayanı olmak üzere, n bu sürekli kesrin periyodunun uzunluğu olsun.

i. n çift sayı ise, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri $j = 1, 2, 3, \dots$ için

$x = p_{jn-1}$
$y = q_{jn-1}$

şeklindedir.

$x^2 - dy^2 = -1$ denklemi için çözüm yoktur.

ii. n tek sayı ise, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri $j = 1, 2, 3, \dots$ için

$x = p_{2jn-1}$
$y = q_{2jn-1}$

şeklindedir.

$x^2-dy^2=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri $j=1,2,3,\ldots$ için

$x=p_{(2j-1)n-1}$

$y=q_{(2j-1)n-1}$

şeklindedir [24].

Örnek 2.13. $x^2-3y^2=\mp 1$ denkleminin çözümleri için önce $\sqrt{3}$'ün sürekli kesir açılımı yardımıyla periyodu bulunur.

$$x_0=\sqrt{3}, \qquad a_0=\left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor=1,$$

$$x_1=\frac{1}{x_0-a_0}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ a_1=\left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor=1,$$

$$x_2=\frac{1}{x_1-a_1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1,\ a_2=\left\lfloor \sqrt{3}+1 \right\rfloor=2,$$

$$x_3=\frac{1}{x_2-a_2}=\frac{1}{\sqrt{3}+1-2}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ a_3=\left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor=1,$$

$$\vdots$$

Sürekli kesir açılımı $\left[\sqrt{3}\right]=\left[1;\overline{1,2}\right]$ şeklinde olup periyodu 2'dir.

$n=2$ çift sayı olduğundan, $x^2-3y^2=1$'in pozitif tam sayı çözümleri

$$x=p_{jn-1},\ y=q_{jn-1} \Rightarrow x=p_{2j-1},\ y=q_{2j-1}$$

dir. $j=1$ için $x=p_1$, $y=q_1$; $j=2$ için $x=p_3$, $y=q_3$; $j=3$ için $x=p_5$, $y=q_5$'dir. Buradan denklemin çözümü $(p_1,q_1),(p_3,q_3)$ ve (p_5,q_5) çiftlerinden oluştuğu görülür. Bu değerler,

$p_1=a_1a_0+1 \qquad q_1=a_1=1$

$p_1=1.1+1$

$p_1=2$

$p_2 = a_2 p_1 + p_0 \quad q_2 = a_2 q_1 + q_0$
$p_2 = 2.2 + 1 \quad q_2 = 2.1 + 1$
$p_2 = 5 \quad q_2 = 3$

$p_3 = a_3 p_2 + p_1 \quad q_3 = a_3 q_2 + q_1$
$p_3 = 1.5 + 2 \quad q_3 = 1.3 + 1$
$p_3 = 7 \quad q_3 = 4$

$p_4 = a_4 p_3 + p_2 \quad q_4 = a_4 q_3 + q_2$
$p_4 = 2.7 + 5 \quad q_4 = 2.4 + 3$
$p_4 = 19 \quad q_4 = 11$

$p_5 = a_5 p_4 + p_3 \quad q_5 = a_5 q_4 + q_3$
$p_5 = 1.19 + 7 \quad q_5 = 1.11 + 4$
$p_5 = 26 \quad q_5 = 15$

olup denklemin çözümleri $(p_1, q_1) = (2,1)$, $(p_3, q_3) = (7,4)$ ve $(p_5, q_5) = (26,15)$ olarak bulunur. $x^2 - 3y^2 = -1$ için çözümü yoktur.

Örnek 2.14. $x^2 - 2y^2 = \mp 1$ denkleminin çözümleri, $\sqrt{2}$ 'nin sürekli kesir açılımının Örnek 2.13'ten $\sqrt{2} = [1; \bar{2}]$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $\sqrt{2}$ 'nin periyodu 1'dir.

$n = 1$ tek sayı olduğundan,

$x^2 - 2y^2 = 1$ denkleminin pozitif tam sayı çözümleri

$x = p_{2jn-1}$, $y = q_{2jn-1} \Rightarrow x = p_{2j-1}$, $y = q_{2j-1}$

dir. $j = 1$ için $x = p_1$, $y = q_1$; $j = 2$ için $x = p_3$, $y = q_3$; $j = 3$ için $x = p_5$, $y = q_5$ 'dir. Buradan denklemin çözümü $(p_1, q_1), (p_3, q_3)$ ve (p_5, q_5) çiftlerinden oluştuğu görülür. Bu değerler,

$p_0 = a_0 = 1 \quad q_0 = 1$
$p_1 = a_1.a_0 + 1 \quad q_1 = a_1 = 2$
$p_1 = 2.1 + 1$
$p_1 = 3$

$p_2 = a_2 p_1 + p_0 \qquad q_2 = a_2 q_1 + q_0$
$p_2 = 2.3 + 1 \qquad q_2 = 2.2 + 1$
$p_2 = 7 \qquad q_2 = 5$

$p_3 = a_3 p_2 + p_1 \qquad q_3 = a_3 q_2 + q_1$
$p_3 = 2.7 + 3 \qquad q_3 = 2.5 + 2$
$p_3 = 17 \qquad q_3 = 12$

$p_4 = a_4 p_3 + p_2 \qquad q_4 = a_4 q_3 + q_2$
$p_4 = 2.17 + 7 \qquad q_4 = 2.12 + 5$
$p_4 = 41 \qquad q_4 = 29$

$p_5 = a_5 p_4 + p_3 \qquad q_5 = a_5 q_4 + q_3$
$p_5 = 2.41 + 17 \qquad q_5 = 2.29 + 12$
$p_5 = 99 \qquad q_5 = 70$

olup denklemin çözümleri $(p_1, q_1) = (3,2)$, $(p_3, q_3) = (17,12)$ ve $(p_5, q_5) = (99,70)$ olarak bulunur.

$x^2 - 2y^2 = -1$ denkleminin çözümleri,

$x = p_{(2j-1)n-1},\ y = q_{(2j-1)n-1} \Rightarrow x = p_{2j-2},\ y = q_{2j-2}$

dir. $j = 1$ için $x = p_0$, $y = q_0$ ve $j = 2$ için $x = p_2$, $y = q_2$ olup denklemin çözümleri $(p_0, q_0) = (1,1)$ ve $(p_2, q_2) = (7,5)$ olarak bulunur.

Teorem 2.18. d tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$x^2 - dy^2 = 1$$

denkleminin en küçük pozitif çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu durumda bu denklemin bütün pozitif çözümleri,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n,\ n = 1,2,3,\ldots$$

şeklindeki (x_n, y_n) çiftlerinden oluşur [24].

Örnek 2.15. $x^2 - 6y^2 = 1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri için Teorem 2.18'den $\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, \ldots] = [2; \overline{2, 4}]$ olduğundan periyodu 2'dir. Buradan en küçük çözüm $x = p_1$ ve $y = q_1$ den

$$
\begin{aligned}
&p_0 = a_0 = 2 \qquad q_0 = 1 \\
&p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad q_1 = a_1 = 2 \\
&p_1 = 2.2 + 1 \\
&p_1 = 5
\end{aligned}
$$

olduğundan ilk çözüm $(5, 2)$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + y_1\sqrt{6} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^1 = 5 + 2\sqrt{6} \\
&x_2 + y_2\sqrt{6} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^2 = 49 + 20\sqrt{6} \\
&x_3 + y_3\sqrt{6} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^3 = \left(49 + 20\sqrt{6}\right)\left(5 + 2\sqrt{6}\right) = 485 + 198\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

olup $(x_1, y_1) = (5, 2)$, $(x_2, y_2) = (49, 20)$ ve $(x_3, y_3) = (485, 198)$ çözümleri elde edilir.

2.4. Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas Sayı Dizileri

Tanım 2.20. İlk iki terimi dışında, diğer tüm terimleri kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olarak yazılabilen sayı dizisine *Fibonacci sayı dizisi* denir F_n ile gösterilir [9]. Matematiksel olarak Fibonacci sayı dizisi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{2.31}$$

biçiminde indirgeme bağıntısı ile gösterilir [25]. F_n dizisinin bazı terimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
F_n	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

Tablo 5. Fibonacci Sayıları

Dizinin terimleri büyüdükçe ardışık iki terimin oranı olan $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ nin $1,618033988749895\ldots$ sayısına, altın orana, yaklaştığı görülür [25]. Bu oran doğada, mimaride, canlılara ait oluşumlarda karşımıza çıkar ve sayılar teorisinde oldukça popülerdir [8].

Uyarı 2.1. Fibonacci sayı dizisine benzer biçimde tanımlanan Lucas sayı dizisi vardır. Bu iki dizi birbirine benzerdir sadece başlangıç koşulları farklıdır [9].

Tanım 2.21. $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ $n \geq 0$ olmak üzere;

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{2.32}$$

indirgeme bağıntısını sağlayan diziye *Lucas sayı dizisi* denir, L_n ile gösterilir [25]. L_n dizisinin bazı terimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
L_n	123	199	322	521	843	1364	2207	3571	5778	9349

Tablo 6. Lucas Sayıları

Tanım 2.22. $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denklemin iki kökü olmak üzere, her $n \geq 0$ tam sayısı için $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $L_n = \alpha^n + \beta^n$ biçimindeki gösterime (F_n) ve (L_n) dizilerinin *Binet formundaki gösterimi* denir [25, 26]. Burada $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ ve $\alpha\beta = -1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 2.19. F_n Fibonacci ve L_n Lucas sayıları olmak üzere;

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \tag{2.33}$$

eşitliği sağlanır [9].

Örnek 2.16. Teorem 2.19 $n=2,3,\dots,6$ için uygulanacak olursa

$n=2$ için $F_1+F_3=1+2=3=L_2$,
$n=3$ için $F_2+F_4=1+3=4=L_3$,

$n=4$ için $F_3+F_5=2+5=7=L_4$,

$n=5$ için $F_4+F_6=3+8=11=L_5$,

$n=6$ için $F_5+F_7=5+13=18=L_6$

bulunur.

Fibonacci ve Lucas sayı dizisinden başka iki önemli sayı dizisi Pell ve Pell-Lucas sayı dizisidir.

Tanım 2.23. $P_0=0$, $P_1=1$ ve $n\geq 0$ olmak üzere;

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n \tag{2.34}$$

indirgeme bağıntısını sağlayan diziye *Pell sayı dizisi* denir ve P_n ile gösterilir [9]. P_n dizisinin bazı terimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985

Tablo 7. Pell Sayıları

Tanım 2.24. $Q_0=2$, $Q_1=2$ ve $n\geq 0$ olmak üzere;

$$Q_{n+2}=2Q_{n+1}+Q_n \tag{2.35}$$

indirgeme bağıntısını sağlayan diziye *Pell-Lucas sayı dizisi* denir ve Q_n ile gösterilir [9]. Q_n dizisinin bazı terimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786

Tablo 8. Pell-Lucas Sayıları

Uyarı 2.2. Pell ve Pell-Lucas sayı dizisi birbirine benzerdir. Sadece başlangıç koşulları farklıdır.

Tanım 2.25. $\gamma = 1+\sqrt{2}$ **ve** $\delta = 1-\sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denklemin iki kökü olmak üzere, her $n > 1$ tam sayısı için $P_n = \dfrac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$ ve $Q_n = \gamma^n + \delta^n$ biçimindeki gösterime (P_n) ve (Q_n) dizilerinin *Binet formundaki gösterimi* denir [25, 26]. Burada $\gamma + \delta = 2$, $\gamma - \delta = 2\sqrt{2}$ ve $\gamma\delta = -1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

BÖLÜM 3

3. ÇOKLU ÇOKGENSEL SAYILAR

Çoklu çokgensel sayılar aynı anda birden fazla çokgensel sayının terimi olabilen sayılardır. Bu kavramı daha iyi anlamak için 36 sayısı göz önüne alınsın. 36 sayısı 1'den 8'e kadar olan doğal sayıların toplamı olduğundan bir üçgensel sayıdır. Ayrıca 6'nın karesi 36'ya eşit olacağından 36 sayısı bir karesel sayıdır. Bu nedenle 36 sayısı bir çoklu çokgensel (üçgensel karesel) sayıdır [12].

Bu bölümde bazı çoklu çokgensel sayıların terimlerinin nasıl bulunacağı ve bu terimlerin bazı tam sayı dizileri ile olan ilişkisi ele alınacaktır. Çoklu çokgensel sayıların terimleri incelenirken Pell denklemlerinden yararlanılacaktır. Çoklu çokgensel sayılar ile ilgili daha fazla ayrıntı için [1, 27, 28] kaynaklarından yararlanılabilir.

Bu bölümde ayrıntılı olarak incelenmiş olan üçgensel karesel sayılar ve üçgensel yedigensel sayılar alt bölümleri [1, 12] de incelenmiştir. Fakat üçgensel beşgensel sayılar alt bölümü daha önce incelenmemiş ve bu tezin özgün kısmını oluşturmaktadır.

3.1. Üçgensel Karesel Sayılar

Tezin bu bölümünde hangi sayıların aynı anda hem üçgensel sayı hem de karesel sayı olduğu araştırılacaktır. Bu tür sayıları araştırırken Pell denklemleri, Pell ve Pell-Lucas tam sayı dizilerinden yararlanılacaktır.

Tanım 3.1. Aynı anda hem üçgensel hem de karesel sayı olabilen doğal sayılara *üçgensel karesel sayılar* denir [1].

Bu tür sayılar araştırılırken ilk olarak üçgensel sayıların genel terimi olan $S_3(u)=\frac{u(u+1)}{2}$ ve karesel sayıların genel terimi olan $S_4(v)=v^2$ birbirine eşitlenir.

$$S_3(u)=S_4(v)\Rightarrow \frac{1}{2}u(u+1)=v^2 \qquad (3.1)$$

Daha sonra (3.1) denklemi düzenlenir ve

$$(2u+1)^2-2(2v)^2=1 \qquad (3.2)$$

denklemi elde edilir. Eğer $x=2u+1$ ve $y=2v$ olarak alınırsa (3.2) denklemi

$$x^2-2y^2=1 \qquad (3.3)$$

Pell denklemine dönüşür. Bu Pell denkleminin ilk bir kaç çözümü 2. Bölüm Örnek 2.14 de verilmiştir. Ayrıca bu denklemin diğer tüm çözümlerinin nasıl elde edilebileceği Teorem 2.18 verilmiştir. Buna göre Teorem 2.18 gereği (3.3) Pell denkleminin ilk altı çözümü aşağıdaki gibidir:

$$(x_1,y_1)=(3,2),$$
$$(x_2,y_2)=(17,12),$$
$$(x_3,y_3)=(99,70),$$
$$(x_4,y_4)=(577,408),$$
$$(x_5,y_5)=(3363,2378),$$
$$(x_6,y_6)=(19601,13860).$$

Eğer buradaki çözümler dikkatli bir şekilde incelenilecek olursa (3.3) Pell denkleminin çözümleri arasında Pell ve Pell-Lucas sayılarının olduğu görülecektir [12].

$$\left(x_1, y_1\right) = (3,2) = \left(\frac{6}{2}, 2\right) = \left(\frac{Q_2}{2}, P_2\right),$$

$$\left(x_2, y_2\right) = (17,12) = \left(\frac{34}{2}, 12\right) = \left(\frac{Q_4}{2}, P_4\right),$$

$$\left(x_3, y_3\right) = (99,70) = \left(\frac{198}{2}, 70\right) = \left(\frac{Q_6}{2}, P_6\right),$$

$$\left(x_4, y_4\right) = (577,408) = \left(\frac{1154}{2}, 408\right) = \left(\frac{Q_8}{2}, P_8\right),$$

$$\left(x_5, y_5\right) = (3363,2378) = \left(\frac{6726}{2}, 2378\right) = \left(\frac{Q_{10}}{2}, P_{10}\right),$$

$$\left(x_6, y_6\right) = (19601,13860) = \left(\frac{39202}{2}, 13860\right) = \left(\frac{Q_{12}}{2}, P_{12}\right).$$

$x^2 - 2y^2 = 1$ Pell denkleminin çözümlerinin Pell ve Pell-Lucas sayıları ile olan ilişkisini ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1. $x^2 - 2y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm çözümleri, $n \geq 1$ için,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{Q_{2n}}{2}, P_{2n}\right) \tag{3.4}$$

dir [12, 25].

İspat: Pell ve Pell-Lucas dizilerinin genel terimleri Binet formülü biçiminde yazılacak olursa, $n \geq 1$ için, $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $P_{2n} = \dfrac{\gamma^{2n} - \delta^{2n}}{\gamma - \delta}$ ve $Q_{2n} = \gamma^{2n} + \delta^{2n}$ elde edilir. Burada yapılan temel aritmetik işlemler sonucunda $\gamma + \delta = 2,\ \gamma - \delta = 2\sqrt{2}$ ve $\gamma\delta = -1$ eşitlikleri elde edilir. O hâlde,

$$
\begin{aligned}
x^2-2y^2 &= \left(\frac{Q_{2n}}{2}\right)^2 - 2\left(P_{2n}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\gamma^{2n}+\delta^{2n}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma^{2n}-\delta^{2n}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\gamma^{4n}+2\gamma^{2n}\delta^{2n}+\delta^{4n}}{4}\right) - 2\left(\frac{\gamma^{4n}-2\gamma^{2n}\delta^{2n}+\delta^{4n}}{8}\right) \\
&= \frac{4\gamma^{2n}\delta^{2n}}{4} \\
&= (\gamma\delta)^{2n} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

■

(3.2) Pell denkleminin inşası sırasında $x=2u+1$ ve $y=2v$ eşitlikleri alınmıştı. Bu eşitlikler yardımıyla $S_3(u)$ üçgensel sayı dizisinin ve $S_4(v)$ karesel sayı dizisinin hangi terimlerinin birbirine eşit olduğu belirlenebilir. $n\in\mathbb{N}$ için

$$
x_n = 2u_n+1 \Rightarrow u_n = \frac{x_n-1}{2} \Rightarrow u_n = \frac{\frac{Q_{2n}}{2}-1}{2} = \frac{Q_{2n}-2}{4} \text{ ve } y_n = 2v_n \Rightarrow v_n = \frac{y_n}{2} = \frac{P_{2n}}{2}
$$

olur. Bu iki eşitlikten $(1,1),(8,6),(49,35),(288,204),(1681,1189),\ldots$ dizisi elde edilir ki bu dizi (3.1)'deki $S_3(u)=S_4(v)$ Diophantine denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri olan (u_n,v_n) dizisinin terimleridir [12].

Aşağıda verilecek olan sonuç ile $S_3(u)=S_4(v)$ Diophantine denkleminin hangi (u_n,v_n) terimleri için sağlandığı ifade edilecektir.

Sonuç 3.1. u ve v birer pozitif tam sayı olsunlar. $S_3(u)=S_4(v)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $n\geq 1$ için

$$
(u_n,v_n) = \left(\frac{Q_{2n}-2}{4}, \frac{P_{2n}}{2}\right) \tag{3.6}
$$

olmasıdır [12].

3.2. Üçgensel Beşgensel Sayılar

Tezin bu bölümünde hangi sayıların aynı anda hem üçgensel sayı hem de beşgensel sayı olduğu araştırılacaktır. Bu tür sayıları araştırırken Pell denklemleri, Fibonacci ve Lucas tam sayı dizilerinden yararlanılacaktır.

Yapılan literatür araştırması sonucunda Üçgensel beşgensel sayılar alt bölümünün daha önce çalışılmadığı görülmüştür. Bu nedenle bu alt bölüm bu tezin özgün kısmını oluşturmaktadır.

Tanım 3.2. Aynı anda hem üçgensel hem de beşgensel sayı olabilen doğal sayılara *üçgensel beşgensel sayılar* denir [1]. Bu tür sayılar araştırılırken ilk olarak üçgensel sayıların genel terimi olan $S_3(v)=\dfrac{v(v+1)}{2}$ ve beşgensel sayıların genel terimi olan $S_5(u)=\dfrac{u(3u-1)}{2}$ birbirine eşitlenir.

$$S_3(v)=S_5(u)\Rightarrow \frac{1}{2}v(v+1)=\frac{1}{2}u(3u-1). \tag{3.7}$$

Daha sonra (3.7) denklemi düzenlenir ve

$$(6u-1)^2-3(2v+1)^2=-2 \tag{3.8}$$

denklemi elde edilir. Eğer $x=6u-1$ ve $y=2v+1$ olarak alınırsa (3.8) denklemi

$$x^2-3y^2=-2 \tag{3.9}$$

Pell denklemine dönüşür. Bu Pell denkleminin tüm çözümleri bulmak için geliştirilen yöntemleri veren teoremler aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2. (x_1,y_1), $x^2-3y^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü ve (X_1,Y_1), $x^2-3y^2=-2$ Pell denkleminin temel çözümü olsun. Bu durumda $n\geq 1$ için

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 3y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{n-1} . \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

olmak üzere (X_n, Y_n), $x^2 - 3y^2 = -2$ Pell denkleminin $n.$ çözümüdür [12].

İspat: Örnek 2.13 ten $x^2 - 3y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (2,1)$'dir. ayrıca açıktır ki $x^2 - 3y^2 = -2$ Pell denkleminin temel çözümü $(X_1, Y_1) = (1,1)$'dir. Bu değerler (3.10) da yerine yazılacak olursa

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

elde edilir ve bu matris işleminde (X_n, Y_n)' nin, $x^2 - 3y^2 = -2$ Pell denkleminin $n.$ çözümü olduğu gösterilmelidir. Bunun için tümevarım yöntemi uygulanacaktır.

i. $n=1$ için $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{0} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$'dir.

Buradan $(X_1, Y_1) = (1,1)$ elde edilir ki bu $x^2 - 3y^2 = -2$ Pell denkleminin temel çözümüdür.

ii. Varsayalım ki (X_{n-1}, Y_{n-1}), $x^2 - 3y^2 = -2$ Pell denkleminin $(n-1)$. çözümü olsun. Bu durumda $X_{n-1}^2 - 3Y_{n-1}^2 = -2$ dir. (3.11)'den

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n-2} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2X_{n-1} + 3Y_{n-1} \\ X_{n-1} + 2Y_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir. O hâlde $X_n = 2X_{n-1} + 3Y_{n-1}$ ve $Y_n = X_{n-1} + 2Y_{n-1}$ dir. Bu değerler $x^2 - 3y^2$ de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
x^2-3y^2 &= \left(2X_{n-1}+3Y_{n-1}\right)^2-3\left(X_{n-1}+2Y_{n-1}\right)^2 \\
&= \left(4X_{n-1}^2+12X_{n-1}Y_{n-1}+9Y_{n-1}^2\right)-3\left(X_{n-1}^2+4X_{n-1}Y_{n-1}+4Y_{n-1}^2\right) \\
&= X_{n-1}^2-3Y_{n-1}^2 \\
&= -2
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

bulunur. Böylece $\left(X_n,Y_n\right)$, $x^2-3y^2=-2$ Pell denkleminin $n.$çözümü olduğu anlamına gelir ve ispat tamamlanmış olur.

$\blacksquare$

Teorem 3.2'nin ispatından $x^2-3y^2=-2$ Pell denkleminin ardışık çözümleri arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki Sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2. $\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$ ve $\left(x_n,y_n\right)$, $x^2-3y^2=-2$ Pell denkleminin ardışık çözümleri olmak üzere, $n>1$ için, $x_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$ ve $y_n=x_{n-1}+2y_{n-1}$'dir.

$x^2-3y^2=-2$ nin temel çözümü $\left(x_1,y_1\right)=(1,1)$ olduğu yukarıda ifade edilmişdir. Sonuç 3.2'den $x^2-3y^2=-2$ Pell denkleminin diğer bazı çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$
\left.\begin{aligned} x_2 &= 2x_1+3y_1=2.1+3.1=5 \\ y_2 &= x_1+2y_1=1+2.1=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x_2,y_2\right)=\left(5,3\right),
$$

$$
\left.\begin{aligned} x_3 &= 2x_2+3y_2=2.5+3.3=19 \\ y_3 &= x_2+2y_2=5+2.3=11 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x_3,y_3\right)=\left(19,11\right),
$$

$$
\left.\begin{aligned} x_4 &= 2x_3+3y_3=2.19+3.11=71 \\ y_4 &= x_3+2y_3=19+2.11=41 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x_4,y_4\right)=\left(71,41\right),
$$

$$
\left.\begin{aligned} x_5 &= 2x_4+3y_4=2.71+3.41=265 \\ y_4 &= x_3+2y_3=71+2.41=153 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x_5,y_5\right)=\left(265,153\right),
$$

$$
\left.\begin{aligned} x_6 &= 2x_5+3y_5=2.265+3.153=989 \\ y_6 &= x_5+2y_5=265+2.153=571 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x_6,y_6\right)=\left(989,571\right).
$$

(3.8) Pell denkleminin inşası sırasında $x=6u-1$ ve $y=2v+1$ eşitlikleri alınmıştır. Bu eşitlikler yardımıyla $S_3(v)$ üçgensel sayı dizisinin ve $S_5(u)$ beşgensel sayı dizisinin hangi terimlerinin birbirine eşit olduğu belirlenebilir. $n\in\mathbb{N}$ için

$x_n = 6u_n - 1 \Rightarrow u_n = \dfrac{x_n + 1}{6}$ ve $y_n = 2v_n + 1 \Rightarrow v_n = \dfrac{y_n - 1}{2}$ olur. Bu iki eşitlikten $(1,1),\left(\dfrac{10}{3},5\right),(12,20),\left(\dfrac{133}{3},76\right),(165,285),\ldots$ dizisi elde edilir ki bu dizinin tüm terimlerinin birer tamsayı olmadığı görülür. O hâlde (3.7) deki $S_3(v) = S_5(u)$ diophantine denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri olan (u_n, v_n) dizisinin terimlerini bulmak için sadece tek indisli çözümler alınır [1, 10].

Aşağıda verilecek olan sonuç ile $S_3(v) = S_5(u)$ diophantine denkleminin hangi (u_n, v_n) terimleri için sağlandığı ifade edilecektir.

Sonuç 3.3. (x_n, y_n); $x^2 - 3y^2 = -2$ Pell denkleminin *n*. çözümü olmak üzere, $n > 1$ için, $S_3(v) = S_5(u)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(u_n, v_n) = \left(\frac{x_{n+1} + 1}{6}, \frac{y_{n+1} - 1}{2}\right)$$

olmasıdır.

Sonuç 3.3'den (u_n, v_n) dizisinin bazı terimleri sırasıyla $(1,1),(12,20),(165,285)$, $(2296,3976),(31977,55385),\ldots$ dir [10].

3.3. Üçgensel Yedigensel Sayılar

Tezin bu bölümünde hangi sayıların aynı anda hem üçgensel sayı hem de yedigensel sayı olduğu araştırılacaktır. Bu tür sayıları araştırırken Pell denklemlerinden faydalanılacaktır.

Tanım 3.3. Aynı anda hem üçgensel hem de yedigensel sayı olabilen doğal sayılara *üçgensel yedigensel sayılar* denir [1]. Bu tür sayıları araştırırken ilk olarak üçgensel sayıların genel terimi olan $S_3(v) = \dfrac{v(v+1)}{2}$ ve yedigensel sayıların genel terimi olan

$$S_7(u) = \frac{u(5u-3)}{2}$$

birbirine eşitlenir.

$$S_3(u) = S_7(v) \Rightarrow \frac{1}{2}v(v+1) = \frac{1}{2}u(5u-3). \qquad (3.14)$$

Daha sonra (3.14) denklemi düzenlenir ve

$$(10u-3)^2 - 5(2v+1)^2 = 4 \qquad (3.15)$$

denklemi elde edilir. Eğer $x = 10u - 3$ ve $y = 2v + 1$ olarak alınırsa (3.15) denklemi

$$x^2 - 5y^2 = 4 \qquad (3.16)$$

Pell denklemine dönüşür. Bu Pell denkleminin tüm çözümleri bulmak için geliştirilen yöntemleri veren teoremler aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.3. d tam kare olmayan pozitif tam sayı ve $x_1 + y_1\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin temel çözümü olsun. Bu durumda $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri, $n \geq 2$ olmak üzere

$$x_n = \frac{x_1x_{n-1} + dy_1y_{n-1}}{2} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{y_1x_{n-1} + x_1y_{n-1}}{2}$$

dir [12, 29].

Teorem 3.4. d tam kare olmayan pozitif tam sayı ve (x_1, y_1), $x^2 - dy^2 = \pm 4$ Pell denkleminin temel çözümü olsun. Bu durumda $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri, $n \geq 1$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n}{2^{n-1}}$$

dir [12, 26].

$x^2 - 5y^2 = 4$ Pell denkleminin temel (en küçük) çözümünü veren Lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.1. $x^2-5y^2=4$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1,y_1)=(3,1)$'dir [12].

İspat: $y_1=1$ en küçük pozitif tam sayıdır. Bu sayı $x^2-5y^2=4$ Pell denkleminde yerine yazılırsa $x_1^2-5.1^2=4 \Rightarrow x_1=3$ bulunur. O hâlde $x^2-5y^2=4$ Pell denkleminin en küçük çözümü $(x_1,y_1)=(3,1)$'dir.

Teorem 3.4. ve Lemma 3.1. dikkate alınırsa $x^2-5y^2=4$ Pell denkleminin bazı çözümleri aşağıdaki gibidir:
$x^2-5y^2=4$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1,y_1)=(3,1)$'dir.

$$\left.\begin{aligned} x_2&=\frac{3x_1+5y_1}{2}=\frac{3.3+5.1}{2}=\frac{9+5}{2}=7\\ y_2&=\frac{x_1+3y_1}{2}=\frac{3+3}{2}=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x_2,y_2)=(7,3),$$

$$\left.\begin{aligned} x_3&=\frac{3x_2+5y_2}{2}=\frac{3.7+5.3}{2}=\frac{21+15}{2}=18\\ y_3&=\frac{x_2+3y_2}{2}=\frac{7+3.3}{2}=\frac{7+9}{2}=8\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x_3,y_3)=(18,8),$$

$$\left.\begin{aligned} x_4&=\frac{3.18+5.8}{2}=\frac{54+40}{2}=\frac{94}{2}=47\\ y_4&=\frac{18+3.8}{2}=\frac{18+24}{2}=\frac{42}{2}=21\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x_4,y_4)=(47,21),$$

$$\left.\begin{aligned} x_5&=\frac{3.47+5.21}{2}=\frac{141+105}{2}=\frac{246}{2}=123\\ y_5&=\frac{47+3.21}{2}=\frac{47+63}{2}=\frac{110}{2}=55\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x_5,y_5)=(123,55).$$

Eğer burdaki çözümler dikkatli bir şekilde incelenilecek olursa (3.16) Pell denkleminin çözümleri arasında Fibonacci ve Lucas sayılarının olduğu görülecektir.

$$(x_1,y_1)=(3,1)=(L_2,F_2),$$
$$(x_2,y_2)=(7,3)=(L_4,F_4),$$
$$(x_3,y_3)=(18,8)=(L_6,F_6),$$
$$(x_4,y_4)=(47,21)=(L_8,F_8),$$
$$(x_5,y_5)=(123,55)=(L_{10},F_{10}).$$

$x^2-5y^2=4$ Pell denkleminin çözümlerinin Fibonacci ve Lucas sayıları ile olan ilişkisini ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.5. $x^2-5y^2=4$ Pell denkleminin tüm çözümleri, $n\geq 1$ için,

$$(x_n,y_n)=(L_{2n},F_{2n}) \tag{3.17}$$

dir [12, 25].

İspat: Fibonacci ve Lucas dizilerinin genel terimleri Binet formülü biçiminde yazılacak olursa, $n\geq 1$ için, $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $F_{2n}=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}$ ve $L_{2n}=\alpha^{2n}+\beta^{2n}$ elde edilir. Burada yapılan temel aritmetik işlemler sonucunda $\alpha+\beta=1,\ \alpha-\beta=\sqrt{5}$ ve $\alpha\beta=-1$ eşitlikleri elde edilir. O hâlde,

$$\begin{aligned}
x^2-5y^2&=(L_{2n})^2-5(F_{2n})^2\\
&=\left(\alpha^{2n}+\beta^{2n}\right)^2-5\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{5}}\right)^2\\
&=\alpha^{4n}+2\alpha^{2n}\beta^{2n}+\beta^{4n}-5\left(\frac{\alpha^{4n}-2\alpha^{2n}\beta^{2n}+\beta^{4n}}{5}\right)\\
&=\alpha^{2n}\beta^{2n}\\
&=4(\alpha\beta)^{2n}\\
&=4
\end{aligned} \tag{3.18}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

■

(3.15) Pell denkleminin inşası sırasında $x=10u-3$ ve $y=2v+1$ eşitlikleri alınmıştı. Bu eşitlikler yardımıyla $S_3(u)$ üçgensel sayı dizisinin ve $S_7(v)$ yedigensel sayı dizisinin hangi terimlerinin birbirine eşit olduğu belirlenebilir. $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=10u_n-3\Rightarrow u_n=\frac{x_n+3}{10}=\frac{L_{2n}+3}{10}$ ve $y_n=2v_n+1\Rightarrow v_n=\frac{y_n-1}{2}=\frac{F_{2n}-1}{2}$ olur. Bu iki eşitlikten $(1,1),\left(\frac{21}{10},\frac{7}{2}\right),(5,10),\left(\frac{126}{10},27\right),\left(\frac{325}{10},\frac{143}{2}\right),\left(\frac{846}{10},188\right),(221,493)\ldots$

dizisi elde edilir ki bu dizi (3.14)'deki $S_3(u)=S_7(v)$ diophantine denkleminin tüm pozitif çözümleri olan (u_n,v_n) dizisinin terimleri değildir. Çünkü bu dizinin tüm elemanları birer tam sayı değildir. Halbuki OEIS'de $S_3(u)=S_7(v)$ diophantine denkleminin tüm çözümleri tamsayıdır ve bunlar $(1,1),(5,10),(221,493),$ $(1513,3382),\ldots$ biçimindedir [10].

Aşağıda verilecek olan Lemma ile $S_3(u)=S_4(v)$ diophantine denkleminin hangi (u_n,v_n) terimleri için sağlandığını bulmada yardımcı olacaktır.

Lemma 3.2. $n\geq 1$ olmak üzere $3|n \Leftrightarrow 2|F_n \Leftrightarrow 2|L_n$ 'dir [12, 26].

Lemma 3.2. ile birlikte aşağıda verilecek olan sonuç ile $S_3(u)=S_7(v)$ diophantine denkleminin hangi (u_n,v_n) terimleri için sağlandığı ifade edilecektir.

Sonuç 3.4. u ve v birer pozitif tam sayı olsunlar. $S_3(u)=S_7(v)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $n\geq 1, L_{2n}\equiv 7(Mod 10)$, F_{2n} tek tamsayı ve $2n\not\equiv 0 (Mod 3)$ olmak üzere $(u_n,v_n)=\left(\frac{L_{2n}+3}{10},\frac{F_{2n}-1}{2}\right)$ olmasıdır [12].

BÖLÜM 4

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, figürsel sayılar arasında özel bir sınıfa ait olan çokgensel sayı çeşitleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu çokgensel sayıların genel terimleri belirlenerek, çeşitli ispat yöntemleri (geometrik illüstrasyon, tümevarım ve polinom yöntemi) ile ifade edilmiştir. Ayrıca, çokgensel sayıların temel özellikleri titizlikle analiz edilmiştir.

Çalışmada sürekli kesirler üzerinde yoğunlaşılmış ve sürekli kesirler kullanılarak Diophantus denklemlerinin çözümleri detaylı bir biçimde çalışılmıştır. Özellikle, Diophantus denklemlerinin özel bir türü olan Pell denklemlerinin çözümleri üzerine odaklanılmıştır.

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas sayı dizileri titizlikle araştırılmış ve bu dizilerin Binet formundaki gösterimi ile ilgili derinlemesine bilgi sunulmuştur.

Çoklu çokgensel sayılar üzerinde detaylı bir inceleme yapılmış ve bu çoklu çokgensel sayıların terimleri belirlenirken Pell denklemlerinden faydalanılmıştır. Ayrıca, bu terimlerin bazı tam sayı dizileri ile olan ilişkisi detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Bu çalışmadan yola çıkarak, $n \geq 3$ boyutlu çokgensel sayılar ve merkezcil çokgensel sayılar gibi farklı çokgensel sayı kümelerinin birleşiminden ortaya çıkan yeni çokgensel sayılar üzerinde hesaplamalar gerçekleştirilebilir. Örneğin, merkezcil üçgensel karesel sayılar gibi belirli sayı formları üzerinde detaylı bir araştırma yapılarak, bu yeni sayıların özellikleri ve matematiksel öznitelikleri analiz edilebilir.

KAYNAKÇA

[1] E. Deza ve M. M. Deza, Figurate Numbers, Paris: World Scientific, 2012.

[2] R. K. Guy, «Every number is expressible as the sum of how many polygonal numbers?,» *The American Mathematical Monthly,* cilt 2, no. 101, pp. 169-172, 1994.

[3] T. L. Heath, Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra, General Books LLC, 2010.

[4] C. D. Olds, Continued Fractions, Mathematical Association of America, 1975.

[5] S. Çenberci, Diophantine Denklemi ve Terai Konjektürü Üzerine, Konya: Selçuk Üniversitesi Doktora Tezi, 2009.

[6] D. Karadağ, Balans Sayıları ve Pell Denklemleri, Denizli: Pamukkale Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, 2017.

[7] A. Özkoç, Bazı Tamsayı Dizileri ve Pell Denklemleri, Bursa: Uludağ Üniversitesi Doktora Tezi, 2013.

[8] S. Elveren, Hosaya Üçgeni ve Hosaya Üçgeninden Elde Edilen Diziler, Balıkesir: Balıkesir Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, 2023.

[9] A. Erdem, T-Kobalans ve Lucas t-Kobalance Sayıları, Bursa: Uludağ Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, 2021.

[10] S. N. J. A., On-line encyclopedia of integer sequences, http://oeis.org/.

[11] P. K. Ray, Balancing and Cobalancing Numbers, Hindistan: Ulusal Teknoloji Enstitüsü Doktora Tezi, 2009.

[12] A. Emin, «Some multi figurate numbers in terms of generalized fibonacci and lucas numbers,» *The Aligarh Bulletin of Mathematics,* cilt 42, no. 1, pp. 107-123, 2023.

[13] S. Nanda, Number theory, Allied Publishers, 1985.

[14] D. Gries ve F. B. Schneider, A Logical Approach to Discrete Math, New York: Springer-Verlag, 1993.

[15] N. Gerasa, Introduction in Arithmetic, New York: The Macmillan Company, 1926.

[16] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, New York: Dover Publications, 2005.

[17] O. Boz, Sürekli Kesirler ve Uygulamaları, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, 2014.

[18] A. O. Asar ve A. Arıkan, Sayılar Teorisi, Ankara: Gazi Kitabevi, 2012.

[19] B. Kendirli, Sayılar kuramı, Yalın Yayıncılık, 2009.

[20] G. Moore, An Introduction to Continued Fractions, Arisona State Collage Flagstaff, 1964.

[21] F. Çallıalp, Sayılar Teorisi, İstanbul: Birsen Yayınevi, 2009.

[22] F. Kaplan, Sürekli Kesirlerde Çatallanma, Kırıkkale: Kırıkkale Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, 2014.

[23] M. G. Duman, Bazı Diyofant Denklemlerin Çözümleri, Sakarya: Sakarya Üniversitesi Doktora Tezi, 2018.

[24] K. Rosen, Elementary Number Theory and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[25] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, New York: A Wiley Interscience, 2001.

[26] R. Keskin ve M. G. Duman, «Positive integer solutions of some Pell equations,» *Palestine Journal of Mathematics,* cilt 8, no. 2, pp. 213-226, 2019.

[27] S. Schlicker, “Numbers simultaneously polygonal and centered polygonal,” *Mathematics Magazine,* pp. 339-350, 2011.

[28] R. B. Nelsen, «Multi-Polygonal Numbers,» *Mathematics Magazine,* cilt 89, no. 3, 2016.

[29] A. Tekcan, «The Pell Equation x^2-Dy^2=±4,» *Applied Mathematical Sciences,* cilt 1, no. 8, pp. 363-369, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Esra GEBEŞ, ilk ve ortaöğrenimini Karabük'te tamamladı. 2007 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde öğrenimine başladı. 2011 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2012 yılında Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi' nde Pedagojik Formasyon Eğitimini tamamladı. 2015 yılında Muş iline Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2022 yılında İzmit Atatürk Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi' nde Müdür Yardımcısı olarak göreve başlamış ve halen devam etmektedir.