Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE

Esra YAMAN

2020
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hakan BOSTANCI

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE

Esra YAMAN

T.C.
Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hakan BOSTANCI

KARABÜK
Haziran 2020

Esra YAMAN tarafından hazırlanan "Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Hakan BOSTANCI ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından Oy Birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 26.06.2020

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)		İmzası
Başkan	: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ (BUÜ)	....
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Hakan BOSTANCI (KBÜ)	....
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Emrah KARAMAN (KBÜ)	....

KBÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Hasan SOLMAZ ....
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Esra YAMAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR SINIFI ÜZERİNE

Esra YAMAN

Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Dr. Öğretim Üyesi Hakan BOSTANCI
Haziran 2020, 34 Sayfa

Çalışmamızın birinci bölümü giriş bölümü olup tez hakkında genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, geometrik fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli bir yeri olan yalınkat analitik fonksiyonların S sınıfı ve bunun önemli alt sınıflarının tanımları verildikten sonra alt başlıklar altında Subordinasyon İlkesi, Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları, Salagean Türev Operatörü Bi-Ünivalent Fonksiyonlar, Bi-Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları ve bununla ilgili teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, Salagean Türev Operatörü yardımıyla oluşturulan $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ alt sınıfının Chebyshev polinomları yardımıyla $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminleri elde edilmiştir. Son olarak beşinci bölümde elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır.

Anahtar Sözcükler **:** Bi-ünivalent, ünivalent, Chebsyhev Polinom.
Bilim Kodu **:** 20404

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON THE CLASS OF BI-UNIVALENT FUNCTIONS

Esra YAMAN

Karabük University
Institute of Graduate Programs
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Hakan BOSTANCI

June 2020, 34 pages

The first part of our study is the introduction and general information about the thesis has been given. In the second part, basic definitions and theorems have been given. In the third chapter, after the definition of the S class of the simplicity analytical functions which have a very important place in the theory of geometric functions and the important subclasses of it, Subardination Principle, Sub-Classes of Univalent Functions, Salagean Derivative Operator, Bi-Univalent Functions, Some Sub-Classes of Bi-Univalent Functions Classes and related theorems have been given. In the fourth section, the $|a_2|$ and $|a_3|$ coefficient estimates are obtained with the help of Chebyshev polinoms of the $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ subclass created with the help of Salagean Derivative Operator. Finally, the results have been compared in the fifth section.

Keywords **:** Bi-univalent, univalent, Chebsyhev Polinom Polynomial.
Science Code **:** 20404

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması ile araştırılmasında Sayın Doç. Dr. Bilal ŞEKER ‘e ve arkadaşım Sayın Veysi MEHMETOĞLU’na, yürütülmesi ile oluşumunda ilgisini esirgemeyen, gerek lisans gerekse yüksek lisans zamanlarımda her zaman desteğini hissettiğim, tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Dr. Öğretim Üyesi Hakan BOSTANCI’ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili aileme, yakın arkadaşlarım Gamze KOÇAY’a, Zuhal TUNÇEL’e, Oğuzkaan Görkem AKTÜRK’e ve ismini sayamadığım birçok arkadaşıma desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa</u>

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{N}$: doğal sayılar kümesi

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$: gerçek sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: karmaşık sayılar kümesi

$\mathbb{U}$: $\{z: |z| < 1\}$, birim disk

$k(z)$: $\frac{z}{(1-z)^2}$ koebe fonksiyonu

$f \prec g$: f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir

$D^n f$: f fonksiyonun n.mertebeden Salagean Türevi

$\mathcal{A}$: $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlanan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonların sınıfı

S : birim diskte analitik, ünivalent ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{P}$: pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonların sınıfı

$\mathcal{K}$: konveks fonksiyonlar sınıfı

S^* : yıldızıl fonksiyonların sınıfı

$S^*(a)$: a-mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}(a)$: a-mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı

$\tilde{S}(a)$: a-mertebeli güçlü yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\widetilde{\mathcal{K}}(a)$: a-mertebeli güçlü konveks fonksiyonlar sınıfı

Ω : Schwarz Fonksiyonu

Σ : Bi-univalent fonksiyonların sınıfı

$S_{\Sigma}^*[a]$: a-mertebeli güçlü bi-yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}_{\Sigma}[a]$: a-mertebeli güçlü bi-konveks fonksiyonlar sınıfı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Geometrik Fonksiyonlar Teorisi, Riemann'ın 1851 yılında kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesini konform olarak birim diske resmeden bir f analitik fonksiyonunun var olduğunu gösteren; "Riemann Dönüşüm Teoremi"olarak bilinen teoremiyle ortaya çıkmıştır (Riemann 1851). Bu yüzden keyfi alınan basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımladığımız analitik yalınkat fonksiyonlar ile çalışmaktansa $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diski içinde tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonlar ile çalışmak kolaylık sağlamıştır. Bunun üzerine analitik yalınkat fonksiyonlar üzerine çalışmalar, $\mathbb{U}$ da analitik, yalınkat ve

$$f(0) = f'(0) - 1 = 0$$

normalizasyonunu sağlayan fonksiyonların S sınıfı üzerinde çalışmalar hız kazanmıştır.

1916 da Bieberbach'ın ileri sürdüğü, $f \in S$ fonksiyonu için

$$|a_n| \leq n$$

eşitsizliği uzun yıllar matematikçileri meşgul etmiştir. 1985 yılında Fransız matematikçi Louis de Branges tarafından genel ispat yapılana kadar bu tahmin üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Louis de Branges tarafından genel ispatın yapılması, beraberinde S sınıfı için yeni alt sınıflar tanımlama, katsayı tahminleri, Fekete-Szego problemleri, Hankel determinant sınırları, büyüme ve genişleme teoremleri, yarıçap problemleri, komşuluklar, integral ve türev operatörleri, konvolusyon, subordinasyon problemleri gibi birçok problemin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Bütün bu çalışmalar tanımlanan yeni alt sınıflar için "a_n" genel katsayısının modülü için de üst sınır elde edilebilir mi?" sorusunu beraberinde getirmiştir. $\mathbb{U}$ birim diskinde, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde Maclauren seri açılımına sahip bi-ünivalent(kendisi ve tersi yalınkat) fonksiyonların sınıfı ilk defa Lewin tarafından 1967 yılında tanımlanmıştır. Bu tip fonksiyonların sınıfı $\sum$ olarak gösterilmiştir.

$$\frac{z}{1-z}\ , \qquad -\log(1-z)\ , \qquad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$\sum$ sınıfınına ait olduğu halde S sınıfına ait en önemli fonksiyon olan Koebe fonksiyonu $\sum$ sınıfında değildir. Çünkü bu Koebe'nin görüntü bölgesi olan bölge $\mathbb{U}$ ile tanımlanan birim diskini içermez.

Lewin'in bu çalışması üzerine ünivalent fonksiyonlardaki gibi bi-ünivalent fonksiyonlar için de katsayılar ile ilgili de araştırmalar ve tahminler yapılmıştır. İlk olarak Lewin $\sum$ sınıfında olan fonksiyonların ikinci katsayısı olan a_2 için $|a_2| < 1.51$ olduğunu kanıtlamıştır. İlk başlarda $\sum$ sınıfında olan fonksiyonların katsayıları için

$|a_n| \leq 1 \ (n \in \mathbb{N}/\{1\})$

olduğu tahmin ediliyordu. Daha sonra 1969 yılında Netanyahu $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ olduğunu ispatlamıştır. 1979 yılında Brannan ve Clunie $|a_2| \leq \sqrt{2}$ varsayımını yapmıştır. 1981 yılında ise Wright ve Styer $|\,a_2| > \frac{4}{3}$ şartını sağlayan $\sum$ sınıfında olan f fonksiyonlarının var olduğunu göstermiştir. $\sum$ sınıfında olan f fonksiyonlarının katsayıları ile ilgili en iyi tahmini $|a_2| \leq 1.485$ olduğunu göstererek Taha 1981 yılında yapmıştır.

Sonra bazı yazarlar tanımlanan bazı alt sınıflar için elde edilen katsayıları, Chebsyhev polinomlarının katsayıları tarafından tekrar elde ettikleri çalışmalar yapılmaya başlanmıştır.

Bizde çalışmamızın dördüncü bölümünde, Salagean Türev Operatörü yardımıyla oluşturulan $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ alt sınıfının $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminleri Chebyshev polinomları yardımıyla elde edilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır.

BÖLÜM 2

KURAMSAL TEMELLER

Tezin bu bölümünde tez içerisinde kullanılacak ana tanım ve teoremlere yer ayrılmıştır.

Tanım 2.1. (Disk) Karmaşık sayıların kümesi $\mathbb{C}$ olup, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olsun.

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\} \tag{2.1}$$

şeklinde verilen kümeye r yarıçaplı z_0 merkezli açık disk,

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\} \tag{2.2}$$

şeklinde verilen kümeye r yarıçaplı z_0 merkezli kapalı disk,

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\} \tag{2.3}$$

şeklinde verilen kümeye r yarıçaplı z_0 merkezli çember denir.

Tanım 2.2. (İç Nokta) $A \subset \mathbb{C}$ bir küme ve A kümesinde $z_0 \in A$ şeklinde z_0 noktası alalım. Bu z_0 noktasının bir komşuluğu tümüyle A kümesi içinde bulunuyorsa z_0 noktasına kompleks düzlemdeki A kümesinin iç noktası denir

Tanım 2.3. (Açık Küme, Kapalı Küme) $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde $A \subset \mathbb{C}$ olacak şekilde A kümesini alalım. Bu A kümesinin her z noktası iç noktaysa bu A kümesine açık küme olarak adlandırılır. A kümesi kapalı küme ise tümleyeni açık kümedir.

Tanım 2.4. (Yığılma Noktası) $A \subset \mathbb{C}$ bir küme ve $A \neq \emptyset$ olmak şartıyla bu A kümesinin z_0 gibi bir noktasının her $D(z_0, \varepsilon)$ komşuluğunda, verilen bu A kümesinin alınan z_0 dan farklı bir z noktası varsa bu z_0'a A kümesinin bir yığılma noktası denir.

Tanım 2.5. (Bağlantılı Küme) $A \subset \mathbb{C}$ kümesini ele alalım. Bu A kümesindeki herhangi z_1 ve z_2 nokta çifti tamamıyla bu küme içerisinde kalacak şekilde sonlu sayıdaki doğru parçası ile birleştirilirse bu küme bağlantılı küme ismi verilir.

Tanım 2.6. (Eğri) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olsun ve $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ biçiminde ifade edilen sürekli fonksiyonu $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde eğri olarak tanımlanır.

Tanım 2.7. (Bölge) Karmaşık düzlemde alınan bir küme bağlantılı, açık ve boştan farklı ise bölge olarak adlandırılır.

Tanım 2.8. (Basit Bağlantılı Bölge) Karmaşık düzlem $\mathbb{C}$ de herhangi bir D bölgesini düşünelim. D bölgesinde kalan her basit kapalı eğri D bölgesininin dışına çıkmadan tek bir noktaya indirgenebiliyorsa D bölgesi basit bağlantılı bölgedir.

Tanım 2.9. (Karmaşık Fonksiyon) $\mathbb{C}$ nin boştan farklı bir alt kümesi A kümesi olmak üzere A kümesi içindeki her bir z elamanına belirli bir $f(z) \epsilon \mathbb{C}$ elemanına eşleyen $f: A \to \mathbb{C}$ biçimindeki f fonksiyonuna A dan $\mathbb{C}$ ye karmaşık fonksiyon denir. $w = f(z)$ biçiminde yazılır.

Tanım 2.10. (Karmaşık Fonksiyonun Limiti) Bir f karmaşık fonksiyonunun z_0 'ın bir delinmiş komşuluğunda tanımlandığını ve L'nin bir karmaşık sayı olduğunu kabul edelim. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < |z - z_0| < \delta$ şartlarını sağlayan $\forall z \in A$ için $|f(z) - L| < \varepsilon$ şeklinde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcutsa f fonksiyonunun z, z_0'a giderken limiti mevcuttur ve L'ye eşittir. $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.11. (Süreklilik) $A \subset \mathbb{C}$ kümesi olsun. $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlanıp $z_0 \in A$ alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $f\big(A \cap D(z_0, \delta)\big) \subset D\big(f(z_0, \varepsilon)\big)$ olacak biçimde

$\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında sürekli olarak adlandırılır.

Tanım 2.12. (Diferansiyellenebilirlik) $\subset \mathbb{C}$ kümesi olsun ve $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlansın. f fonksiyonunun bir $z_0 \in A$ noktasının komşuluğunda tanımlı olduğunu kabul edelim.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

limiti mevcutsa f fonksiyonuna alınan z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir ve $f'(z_0)$ ve $\frac{df}{dz}(z_0)$ biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.13. (Analitik Fonksiyon) $A \subset \mathbb{C}$ olsun. $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu alınan bir z_0 da ve bu alınan (z_0) noktasının uygun komşuluğundaki tüm noktalarda diferansiyellenebilirse(türevlenebilir) f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir adı verilir.

Tanım 2.14. (Maksimum Modül Teoremi) A bölgesi içinde analitik $f(z)$ fonksiyonunu ele alalım. A bölgesinde $f(z)$ fonksiyonu sabit kalmadıkça, A bölgesinin sınırında $|f(z)|$ maksimum değerini alır.

Tanım 2.15. (Schwarz Yardımcı Teoremi) $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diski ve bu diskte $f(z)$ analitik fonksiyonu alalım ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer ki $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diski içerisinde $|f(z)| \leq 1$ ise $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ olur. Eşitsizliğin sağlandığı durum yalnızca $\theta \in \mathbb{R}$ için $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonudur.

Tanım 2.16. (Argüment) Karmaşık düzlem üzerinde z kompleks sayısını ele alalım. Bu z noktası bir vektör belirtir ve bu vektör pozitif reel eksenle ϑ açısı yapar. Yaptığı bu ϑ açısı z kompleks sayısının argümenti olarak adlandırılır. $\vartheta = \arg(z)$ biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.17. (Konform Dönüşüm) z- düzlemindeki kesişen iki yay arasındaki açı, yayların bir doğrusal tasvir altında w- düzlemindeki resimleri arasındaki açıya eşittir. Bu açı koruma özelliğine sahip olan kompleks tasvirlere konform tasvirler denir.

$w = f(z)$ bir D bölgesinde tanımlanan kompleks tasvir ve z_0, D bölgesinde bir nokta olsun. Bu takdirde z_0 noktasında kesişen D bölgesindeki her yönlendirilmiş γ_1, γ_2 düzgün eğri çiftinin z_0 noktasındaki aralarındaki açı, γ_1' ve γ_2' resim eğrilerinin $f(z_0)$ noktasında aralarındaki açıya hem büyüklükte hem de yönde eşitse $w = f(z)$ kompleks tasvirine z_0 da konform dönüşüm denir. Eğer ki bu f fonksiyonu alınan her z_0 noktasında konform ise f fonksiyonu bu D bölgesinde konform olur.

Tanım 2.18. f fonksiyonu herhangi bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu bu z_0 noktasında konform dönüşüm olarak adlandırılır.

Tanım 2.19. (Dizi) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlansın. $f(n) = z_n$ şeklinde ifade edilen fonksiyon $\mathbb{C}$ de karmaşık dizi olarak adlandırılır.

Tanım 2.20. (Yakınsaklık) (z_n) $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde bir dizi olsun. $z_0 \in \mathbb{C}$ ele alalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ niteliğindeki tüm $n \in \mathbb{N}$ için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyor ise z_0, (z_n) dizisinin limiti olarak adlandırılır. (z_n) dizisinin bir $z_0 \in \mathbb{C}$ limiti mevcutsa (z_n) dizisi yakınsak dizi olarak adlandırılır.

Tanım 2.21. (Seri) Karmaşık dizi olarak (z_n) ele alalım.

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots z_n + \cdots$$

ifadesi karmaşık seri olarak adlandırılıp $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ biçiminde gösterilir. Kısmi toplamlar dizisi ise yukarıda verilen bu serinin $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ biçiminde tanımlanan (S_n) dizisidir.

Tanım 2.22. (Yakınsak Seri) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ karmaşık bir serinin (S_n) kısmi toplamlar dizisi olsun.

$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots z_n$

olmak üzere, yakınsak ise ($n \to \infty$ iken $S_n \to L$) seri L' ye yakınsar veya serinin toplamı L olarak adlandırılır.

Tanım 2.23. (Kuvvet Serisi) $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

biçimindeki seriler kuvvet serisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.24. (Taylor Teoremi f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve z_0, D bölgesinde bir nokta olsun. Bu durumda f, z_0 merkezli R yarıçaplı tamamen D içinde yer alan en geniş C çemberi için geçerli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

kuvvet serisi açılımına sahiptir.Yukarıda ifade edilen kuvvet serisi, $f(z)$ fonksiyonun z_0 noktası komşuluğundaki Taylor serisi olarak adlandırılır. Eğer ki $z_0 = 0$ alınırsa bu Taylor serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Maclauren serisi olarak adlandırılır.

BÖLÜM 3

MATERYAL VE METOT

3.1. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Tanım 3.1.1. (Ünivalent Fonksiyonlar) $D \subset \mathbb{C}$ karmaşık bölgede f fonksiyonu tanımlansın. Her bir $z_1, z_2 \in D$ için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyor ise tanımlanan f fonksiyonuna verilen D bölgesinde ünivalent(yalınkat) denir.

Tanım 3.1.2. (Yerel Ünivalent Fonksiyon) $D \subset \mathbb{C}$ karmaşık bölgede tanımlanan f fonksiyonu D bölgesinden aldığımız bir z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda ünivalent(yalınkat) ise tanımlanan f fonksiyonu bu aldığımız z_0 noktasında yerel ünivalent fonksiyon adı verilir.

Teorem 3.1.3. $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde bir $D \subset \mathbb{C}$ karmaşık bölgesi olsun. Bu bölgede analitik bir f fonksiyonu tanımlansın. f fonksiyonunun z_0 da yerel ünivalent olmasının gerek ve yeter şartı $z_0 \in D$ noktasında $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır.

$D \subset \mathbb{C}$ karmaşık bölgesi içerisinde tanımlanan f fonksiyonu verilen $z_0 \in D$ noktasında yerel ünivalent ise $f'(z_0)$ da f fonksiyonun $z_0 \in D$ noktası civarındaki yerel geometrik davranışını belirler.

Konform bir dönüşümde bilindiği üzere açılar ve dönmeler korunur. Yerel ünivalent fonksiyonlar da açıları ve dönmeyi koruduğundan dolayı ünivalent olan bir fonksiyon da konform dönüşüm olarak düşünülebilir. Öte yandan bir $D \subset \mathbb{C}$ karmaşık bölgesi için $f'(z_0) \neq 0$ şartı tanımlanan f fonksiyonunun $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tamamında ünivalent olması için gerek şart olmasına rağmen yeterli değildir. Örnek vermek gerekirse $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \left\{z: 1 < |z| < 2\,, 0 < argz < \frac{3\pi}{2}\right\}$ bölgesi içinde ünivalent olmamasına rağmen yerel ünivalenttir.

Teorem 3.1.4. (Riemann Dönüşüm Teoremi) $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde bir D bölgesini alalım. Her $z_0 \in D$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak biçimde bu D basit bağlantılı bölgeyi $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskine birebir ve konform biçimde dönüştüren tek bir f fonksiyonu mevcuttur.

Basit bağlantılı bir bölgedeki ünivalent fonksiyonlar Reimann Dönüşüm Teoremi yardımıyla $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskindeki ünivalent fonksiyonlara dönüştürülür.

$\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim disk ve bu diskte bir $f(z)$ fonksiyonu alalım. Analitik ve ünivalent olarak tanımlanan bu $f(z)$ fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulu ile normalize edilebilir. Eğer $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde $f(z)$ fonksiyonu analitik ve ünivalent ise

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(0)}$$

fonksiyonu verilen $f(z)$ fonksiyonu ile aynı özelliklere sahiptir. Bundan ötürü yapılan bu normalizasyon sınıfın genelliğini sınırlandırmaz.

Bu tez çalışmalarımızı, $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde tanımlanan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçimindeki seri açılımına sahip olan analitik fonksiyonların sınıfları ile sınırlandıracağız. $\mathcal{A}$ ile göstereceğimiz sınıf bu analitik fonksiyonların sınıfıdır.

Tanım 3.1.5. (S Sınıfı) Normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırığımız bu sınıf $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde tanımlanan $f(z)$ fonksiyonları sınıfı analitik, ünivalent ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlar.

Koebe fonksiyonu S sınıfındaki en mühim fonksiyonlardan birisidir.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

$\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ bölgesine resmeden Koebe fonksiyonudur.

Lineer kesirsel dönüşüm aşağıdaki verilen fonksiyondur.

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

Bu verilen $f(z)$ fonksiyon $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskini $Re\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemine dönüştürür. Bu $f(z)$ fonksiyonu normalize edildiğinden S sınıfında olur.

Bieberbach, ilk defa S Sınıfındaki f fonksiyonlarının katsayıları için üst sınır oluşturmayı denemiştir. Bu doğrultuda $|a_2|$ katsayısı için çalışmalar yapmış ve $|a_2| \leq 2$ olduğunu kanıtlamıştır.

Tanım 3.1.6. (Bieberbach Teoremi) $f(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots \in S$ ise $|a_2| \leq 2$ dir. Bieberbach, S sınıfında bulanan f fonksiyonların katsayılarıyla ilgili olarak $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin sağladığına ilişkin kestirimlerde bulundu. Bieberbach kestirimi adıyla adlandırılan bu problemi L.De Branges ispatlamaya çalıştı ve 1985 yılında ispatladı.

Tanım 3.1.7. (L.De Branges Teoremi) $f(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots \in S$ ise her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ dir (Bieberbach 1916).

Koebe tarafından bulunan Koebe dörtte bir teoremi S sınıfındaki f ünivalent fonksiyonları için en önemli sonucudur. Her $f(0) = 0$ şartlı bir açık dönüşüm olduğundan bu dönüşümün görüntüsü, orijin merkezli açık bir diski kapsar. Koebe, S sınıfındaki bütün fonksiyonların görüntülerinin $w < \rho$ diskini kapsadığını ortaya atmıştır. Koebe fonksiyonu $\rho \leq \frac{1}{4}$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 3.1.8. (Koebe Dörtte Bir Teoremi) S sınıfın içerisinde bulanan tüm fonksiyonların görüntüleri $\left\{w: |w| < \frac{1}{4}\right\}$ diskini kapsar (Duren, 1983).

İspat: $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu S sınıfında ve $c \notin f(U)$ olsun. $f(z) \neq c$ olduğundan

$$g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) z^2 + \cdots$$

şeklinde verilen $g(z)$ fonksiyonu da S sınıfında yer alır. $g(z)$ fonksiyonuna Bieberbach teoremini uygularsak $\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2$ elde edilir. Böylece

$$\left|\frac{1}{c}\right| - |a_2| \leq \left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2$$

olup ve $f(z)$ fonksiyonuna Bieberbach teoremini uygularsak $\left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2| \leq 4$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

S sınıfında bulunan fonksiyonlar için Bieberbach Teoreminin ispatının yapılmış olması bu sınıfta bulunan fonksiyonlar için başka teoremlerin de ortaya çıkmasına sebep olmuşur. Bu teoremlerin başında Bükülme ve Büyüme Teoremleri gelir.

Teorem 3.1.9. (Bükülme Teoremi) S sınıfında bulanan bütün f fonksiyonları için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1$$

yukarıdaki şartlar sağlanır (Goodman, 1983).

Teorem 3.1.10. S sınıfında bulanan bütün f fonksiyonları için

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}, \qquad |z| = r < 1$$

dir (Goodman, 1983).

Teorem 3.1.11. (Büyüme Teoremi) S sınıfında bulanan bütün f fonksiyonları için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1$$

yukarıdaki şartlar sağlanır (Goodman, 1983).

Büyüme ve Bükülme teoremlerinin bir araya getirilmesiyle oluşturulan eşitsizlik teorem olarak verilmiştir.

Teorem 3.1.12. S sınıfında bulanan bütün f fonksiyonları için

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}, |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Duren, 1983).

3.2. ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Tezimizin bu kısmında ünivalent fonksiyonların önemli bir kaç alt sınıfını tanımlayacağız ve hakkında bilgilendirme yapacağız.

Tanım 3.2.1. (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı) $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan ve bu diskteki her bir z noktası için $Re\{P(z)\} > 0$ şartını sağlayan $P(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ formatındaki fonksiyonlar sınıfı pozitif reel kısımlı fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır. Bu sınıf $\mathcal{P}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.2. (Carathedory Teoremi) $f \in \mathcal{P}$

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \qquad (z \in \mathbb{U})$$

olsun. Bu durumda $|p_n| \leq 2 \quad n = 2,3,4$ ...dir (Goodman, 1983).

Tanım 3.2.3. (Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) $D, \mathbb{C}$ karmaşık düzleminde bir bölge olsun. D bölgesinde alınan bir $z = 0$ noktasını D bölgesinde alınan herhangi bir z_0 noktasıyla birleştiren doğru parçası eğer D bölgesinin içindeyse D bölgesine orjine göre yıldızıl denir.

Bir $f(z)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu $f(z)$ fonksiyonu D birim diskini yıldızıl bir bölgeye resmediyor ise bu fonksiyona yıldızıl fonksiyon denir.

S^* birim diskte analitik ve ünivalent yıldızıl fonksiyonların sınıfıdır (Duren, 1983).

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Yıldızıl fonksiyona örnek olarak Koebe fonksiyonu verilebilir.

Tanım 3.2.4. $f \in \mathcal{A}$ ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olsun. Bu durumda $f \in S^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Yıldızıl fonksiyonlar kümesi ise aşağıdaki gibidir:

$$S^* = \left\{f \in \mathcal{A} : \ Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right); \ z \in \mathbb{U}\right\}.$$

1936 da Robertson tarafından tanımı yapılan ve yıldızıl fonksiyonlar kümesi S^* nin bir alt sınıfı olan α −mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı aşağıdaki gibidir:

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \ Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha; \ z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}.$$

Tanım 3.2.5. (Güçlü Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) $f \in \mathcal{A}$ olsun.

$$\left| arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \frac{\pi}{2} \ , \qquad (z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1)$$

veya buna denk olan

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} \ , \quad (z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $\alpha -$ mertebeli güçlü yıldızıl fonksiyon denir. $\widetilde{S}(\alpha)$, güçlü yıldızıl fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılmış $\alpha = 1$ için $\tilde{S}(1) = S^*$olup Brannan ve Kirwan (1969) ve Stankiewicz (1966) kişileri tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır.

Tanım 3.2.6. (Konveks Fonksiyonlar Kümesi) $D, \mathbb{C}$ karmaşık düzleminde bir bölge olarak tanımlansın. D bölgesinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru parçası eğer ki tamamen D bölgesi içinde kalıyorsa başka bir söylemle $z_1, z_2 \in D$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in D$ koşulunu sağlıyor ise D bölgesine konveks bölge denir. $f(D)$ konveks bölge ise f fonksiyonu da konveks fonksiyon olarak adlandırılır. $\mathcal{K}$, konveks fonksiyonların sınıfının gösterimidir.

$f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu alalım. Bu fonksiyonun $\mathcal{K}$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$Re\left(1 + \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \ \ z \in \mathbb{U}$$

olmasıdır. Yukarıda tanımlanan eşitsizlik Study (1913) tarafından verilmiştir.

$\mathcal{K}$ sınıfında olan $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini yarı düzleme dönüştüren önemli bir fonksiyondur.

Konveks fonksiyonlar kümesi $\mathcal{K}$ nin bir alt sınıfı olan $\alpha -$mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı vardır ve bu sınıfın tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \; Re\left(1 + \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha; \; z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}.$$

Konveks ve yıldızıl fonksiyonların birbirleriyle ilişkisi aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.7. (Alexander Teoremi) $f \in \mathcal{A}$ olsun ve $z \in \mathbb{U}$ verilsin. $f(z) \in \mathcal{K}$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in S^*$olmasıyla mümkündür. (Alexander, 1915).

Strohhacker 1933 yılında ise $f \in \mathcal{K}$ ise $f \in S^*\left(\frac{1}{2}\right)$ olduğunu kanıtlamıştır.

Tanım 3.2.8. (Güçlü Konveks Fonksiyonlar Sınıfı) $f \in \mathcal{A}$ olsun.

$$\left| arg\left(1 + \frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \alpha\frac{\pi}{2} \;, \qquad (z \in \mathbb{U}, 0 \leq \alpha < 1)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $\alpha -$ mertebeli güçlü konveks fonksiyon denir. $\widetilde{\mathcal{K}}(\alpha)$, güçlü konveks fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılmış $\alpha = 1$ için $\widetilde{\mathcal{K}}(1) = \mathcal{K}$ dir.

3.3. SUBORDİNASYON İLKESİ

Lindelöf (1909) tarafından ilk defa kullanılan subordinasyon kelimesi ünivalent fonksiyonlar için oldukça önemli yere sahiptir. Ancak 1925 yılında Littlewood ve 1943 yılında Rogosinski subordinasyonun tanıtılmasını ve ilgili teoremleri ortaya atmıştır.

Tanım 3.3.1. (Schwarz Fonksiyonu) $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

ve yukarıdaki gibi tanımlanan $w(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer bu verilen fonksiyon $|w(z)| < 1$ ve $w(z) = 0$ koşullarını sağlıyorsa Schwarz Fonksiyonu olarak adlandırılır ve Ω ile gösterilir.

Tanım 3.3.2. (Subordinasyon Prensibi) $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde f ve g analitik fonksiyonlarını ele alalım. $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(z) = g\big(w(z)\big)$ olacak biçimde bir $w(z) \in \Omega$ fonksiyonu mevcutsa f fonksiyonu g fonksiyonuna subordine diye adlandırılır ve $f \prec g$ biçiminde gösterilir.

f fonksiyonunun ünivalent olması şart değildir. $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde $g(z)$ fonksiyonu ünivalent ise

$$f \prec g = f(0) = g(0) \quad f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$$

şeklindedir (Duren,1983).

3.4. SALAGEAN OPERATÖRÜ

Bu kısımda tez çalışmamızda yararlanacağımız Salagean türev operatörü hakkında bilgilendirme yapacağız.

Tanım 3.4.1. (Salagean Türev Operatörü) $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

yukarıdaki fonksiyonun sınıfı $\mathcal{A}$ olsun. Salagean, $\mathcal{A}$ sınıfında olan bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^0 f(z) = f(z)$$
$$D^1 f(z) = z f'(z)$$
$$\vdots$$
$$D^n f(z) = D\big(D^{n-1} f(z)\big) \quad n \in \mathbb{N} = 1,2,3 \ldots$$

biçiminde bir türev operatörü tanımlamıştır (Salagean, 1983).

Yapılan basit işlemler ve düzenlemeler sayesinde $\mathcal{A}$ sınıfında olan $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k \quad n \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

olur.

3.5. Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu bölümümüzde bi-ünivalent fonksiyonlara dair bilgiler ve bu fonksiyonların katsayılarıyla ilgili birtakım bilgiler verilecektir.

Tanım 3.5.1. (Bi-Ünivalent Fonksiyon) $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer ki f ve f nin tersi olan f^{-1} fonksiyonları $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde ünivalent fonksiyonlar ise $f(z)$ fonksiyonuna bi-ünivalent fonksiyon denir.

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

formunda olan S sınıfındaki her $f(z)$ fonksiyonun

$$f^{-1}\big(f(z)\big) = z \; (z \in \mathbb{U})$$

$$f\big(f^{-1}(w)\big) = w \; \left(|w| < r_0(f);\; r_0(f) \geq \frac{1}{4}\right)$$

bu özellikleri sağlayan tersi vardır.

$$f\big(f^{-1}(w)\big) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \cdots$$

biçimindedir.

$\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde bi-ünivalent ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde Maclauren seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfını $\sum$ olarak ifade edeceğiz. Lewin ilk kez 1967 yılında $\sum$ sınıfını tanımlamıştır.

$$\frac{z}{1-z}\,, \qquad -\log(1-z)\,, \qquad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$\sum$ sınıfınına örnek olarak gösterilebilir. Bu sınıfa örnek olmayan en önemli fonksiyon Koebe fonksiyonudur. Çünkü bu fonksiyonun görüntü bölgesi $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskini içermez.

Ünivalent fonksiyonlardaki gibi bi-ünivalent fonksiyonların katsayıları için de araştırmalar ve tahminler yapılmıştır. Lewin $\sum$ sınıfında olan fonksiyonların ikinci katsayısı olan a_2 için $|a_2| < 1.51$ olduğunu kanıtlamıştır. İlk başlarda $\sum$ sınıfında olan fonksiyonların katsayıları için $|a_n| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N}/\{1\})$ olduğu kanısındalardı. Daha sonra 1969 yılında Netanyahu $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ olduğunu kanıtlamıştır.1979 yılında Brannan ve Clunie $|a_2| \leq \sqrt{2}$ varsayımını yapmıştır. 1981 yılında ise Wright ve Styer

$|a_2| > \frac{4}{3}$ şartını sağlayan $\sum$ sınıfında olan f fonksiyonlarının var olduğunu göstermiştir. $\sum$ sınıfında olan f fonksiyonlarının katsayıları ile ilgili en iyi tahmini 1981 yılında Taha $|a_2| \leq 1.485$ olduğunu göstererek yapmıştır.

3.6. Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Bu bölümümüzde bi-ünivalent fonksiyonların önemli birkaç alt sınıfını tanımlayacağız ve hakkında bilgilendirme yapacağız

Tanım 3.6.1. (α −Mertebeden Güçlü Bi-Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) 1986 yılında Brannan ve Taha tarafından tanımlanmıştır. Bu sınıf $S_{\Sigma}^{*}[\alpha]$ şeklinde gösterilir. Eğer bir f fonksiyonunun bu sınıfa ait olabilmesi için aşağıda verilen şartları sağlaması gerekmektedir.

$$f \in \Sigma \qquad \left|arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad z \in \mathbb{U}, 0 < \alpha \leq 1$$

ve

$$\left|arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad w \in \mathbb{U}, 0 < \alpha \leq 1$$

buradaki g fonksiyonu olarak verilen fonksiyon f in tersi olan f^{-1} in $\mathbb{U}$ birim diskine genişlemesidir.

Tanım 3.6.2. (α −Mertebeden Güçlü Bi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı) α −mertebeden güçlü bi-yıldızıl fonksiyonlar sınıfı gibi bi-ünivalent fonksiyonların diğer alt sınıfı da α −mertebeden güçlü bi-konveks fonksiyonlar sınıfıdır. Bu sınıf $\mathcal{K}_{\Sigma}[\alpha]$ şeklinde gösterilir. Bir f fonksiyonunun bu sınıf içerisinde olabilmesi için aşağıdaki verilen şartları sağlaması gerekmektedir.

$$f \in \Sigma \quad \left| arg\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad z \in \mathbb{U}, 0 < \alpha \leq 1$$

ve

$$\left| arg\left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad w \in \mathbb{U}, 0 < \alpha \leq 1.$$

BÖLÜM 4

$N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ALT SINIFININ TANIMI VE KATSAYI TAHMİNLERİNİN CHEBSYHEV POLİNOMLARI YARDIMIYLA BULUNULMASI

Bu bölümde önce dört çeşidi bulunan Chebsyhev polinomunun sadece birinci ve ikinci çeşidinin tanımlarından bahsedeceğiz. Sonra bunları kullanarak belirlenen bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarının katsayı tahminlerini bulacağız.

Tanım 4.1. (Birinci Çeşit Chebsyhev Polinomu) Polinomun derecesi $n \geq 0$ ve $t \in [-1,1]$ olmak şartıyla birinci çeşit Chebsyhev Polinomu

$$T_n(t) = \cos(narccost)$$

şeklinde tanımlanır (Suli ve Mayers, 2003).

Eğer burada verilen t için $t = cos\alpha$ alınırsa

$$T_n(t) = \cos(n\alpha)$$

elde edilir (Mason ve Handscomb, 2003).

Birinci çeşit olarak belirlenen $T_n(t)$ polinomunun üretici fonksiyonu $t \in (-1,1)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)z^n = \frac{1-tz}{1-2tz+z^2} \quad z \in \mathbb{U}$$

yazılabilir.

Tanım 4.2. (İkinci Çeşit Chebsyhev Polinomu) Polinomun derecesi $n \geq 0$ ve $t \in [-1,1]$ ve $t = cos\alpha$ olmak şartıyla İkinci Çeşit Chebsyhev Polinomu

$$U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

şeklinde tanımlanır (Mason ve Handscomb, 2003). İkinci çeşit Chebsyhev polinomunun $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere birkaç terimi

$$U_1(t) = 2t \qquad U_2(t) = 4t^2 - 1 \qquad U_3(t) = 8t^3 - 4t \tag{4.1}$$

şeklindedir.

1996 yılında Whittaker ve Watson $t = cos\alpha$ ve $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olmak üzere $H(z,t)$ fonksiyonunu

$$H(z,t) = \frac{1}{1 - 2cos\alpha z + z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} z^n \quad z \in \mathbb{U}$$

olarak tanımlamışlardır. Bu durumda

$$H(z,t) = 1 + 2cos\alpha z + (3cos^2\alpha - sin^2\alpha)z^2 + \cdots \quad z \in \mathbb{U}$$

başka bir ifade ile

$$H(z,t) = 1 + U_1(t)z + U_2(t)z^2 + \cdots \tag{4.2}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.3. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir fonksiyon $0 < \alpha \leq 1,\ \lambda \geq 1$, $\mu \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $z, w \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$$\left|arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (4.3)$$

ve

$$\left|arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (4.4)$$

koşullarını sağlayan $f\in\sum$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ şeklinde tanımlanmıştır (Şeker ve Mehmetoğlu, 2016). Burada $f(z)$ fonksiyonunun tersi olarak $g(w)$ fonksiyonu verilmiş olup

$$g(w)=f^{-1}(w)=w-a_2w^2+(2a_2-a_3)w^3-(5a_2^3+5a_2a_3+a_4)w^4+\cdots$$

şeklindedir.

Tanım 4.4. f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda;t)$ sınıfına ait, $0<\alpha\leq 1,\ \lambda\geq 1,\ \mu\geq 0$ ve $t\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ olsun. Her $z,w\in\mathbb{U}$ için aşağıda ifade edilen subordinasyon şartları sağlanır.

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\prec H(z,t):=\frac{1}{1-2tz+z^2} \qquad (4.5)$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\prec H(w,t)$$
$$:=\frac{1}{1-2tw+w^2} \qquad (4.6)$$

Teorem 4.5. f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda;t)$ sınıfına ait $0<\alpha\leq 1,\ \lambda\geq 1,\ \mu\geq 0$ ve $t\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ olmak şartıyla $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminleri aşağıda verildiği gibidir.

$$|a_2|\leq\frac{4t\sqrt{t}}{\sqrt{4t^2(\mu+2\lambda)[2^{2n}(\mu-1)+2.3^n]+2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2[-4t^2+1]}} \qquad (4.7)$$

$$|a_3| \leq \frac{2t}{3^n(\mu+2\lambda)} + \frac{4t^2}{2^{2n}(\mu+\lambda)^2} \tag{4.8}$$

İspat. f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda;t)$ sınıfında ve (4.5) ve (4.6) gereği

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda \frac{D^{n+1} f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}$$
$$= 1 + U_1(t)p(z) + U_2(t)p^2(z) + \cdots \tag{4.9}$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda \frac{D^{n+1} g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}$$
$$= 1 + U_1(t)q(w) + U_2(t)q^2(w) + \ldots \tag{4.10}$$

yazılabilir.

p ve q gibi birkaç analitik fonksiyonlar için

$$p(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \quad z \in \mathbb{U} \tag{4.11}$$

$$q(w) = d_1 w + d_2 w^2 + d_3 w^3 + \cdots \quad w \in \mathbb{U} \tag{4.12}$$

olduğundan $p(0) = 0,\ |p(z)| < 1$ ve $q(0) = 0, |q(z)| < 1$ dir.

Yukarıda belirtilen $p(z)$ ve $q(w)$ Schwarz fonksiyonlarıdır ve bu sebepten dolayı

$$|c_j| \leq 1 \qquad |d_j| \leq 1 \tag{4.13}$$

yazılabilir.

(4.9), (4.10), (4.11) ve (4.12) dan aşağıdaki eşitlikler

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}$$
$$=1+U_1(t)c_1z+[U_1(t)c_2+U_2(t)c_1^2]z^2+\cdots \tag{4.14}$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}$$
$$=1+U_1(t)d_1w+[U_1(t)d_2+U_2(t)d_1^2]w^2+\cdots \tag{4.15}$$

elde edilir. Katsayıları (4.14) ve (4.15) türünden ifade edersek

$$2^n(\mu+\lambda)a_2=U_1(t)c_1 \tag{4.16}$$

$$2^{2n-1}(\mu-1)(\mu+2\lambda)a_2^2+3^n(\mu+2\lambda)a_3=U_1(t)c_2+U_2(t)c_1^2 \tag{4.17}$$

$$-2^n(\mu+\lambda)a_2=U_1(t)d_1 \tag{4.18}$$

$$2^{2n-1}(\mu-1)(\mu+2\lambda)a_2^2+3^n(\mu+2\lambda)(2a_2^2-a_3)=U_1(t)d_2+U_2(t)d_1^2 \tag{4.19}$$

denklemleri yazılır. Öte yandan

$$c_1=-d_1 \tag{4.20}$$

ve

$$2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2a_2^2=U_1^2(c_1^2+d_1^2) \tag{4.21}$$

elde ederiz. Buna ek olarak (4.16) ve (4.18)'den

$$[2^{2n}(\mu-1)(\mu+2\lambda)+2.3^n(\mu+2\lambda)]a_2^2=U_1(t)(c_2+d_2)+U_2(t)(c_1^2+d_1^2) \tag{4.22}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.21)'deki $(c_1^2+d_1^2)$ yalnız bırakılıp (4.22) eşitliğinde yazılır ve düzenlenirse;

$$\left[2^{2n}(\mu-1)(\mu+2\lambda)+2.3^n(\mu+2\lambda)-\frac{U_2(t)2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2}{U_1^2(t)}\right]a_2^2=U_1(t)(c_2+d_2) \qquad (4.23)$$

bulunan bu eşitlikte (4.1) de ifade ettiğimiz değerler yerine yazılır ve düzenleme yapılırsa eğer;

$$a_2^2 = \frac{8t^3(c_2+d_2)}{4t^2 2^{2n}(\mu-1)(\mu+2\lambda)+4t^2 2.3^n(\mu+2\lambda)-4t^2 2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2+2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2}$$

elde edilir. $|c_j| \leq 1$ ve $|d_j| \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılıp gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$|a_2| \leq \frac{4t\sqrt{t}}{\sqrt{4t^2(\mu+2\lambda)[2^{2n}(\mu-1)+2.3^n]+2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2[-4t^2+1]}}$$

bulunur. Böylece $|a_2|$ katsayısının ispatı tamamlanır.

Şimdi (4.17)'den (4.19) çıkartılırsa

$$2.3^n(\mu+2\lambda)a_3-2.3^n(\mu+2\lambda)a_2^2=U_1(t)(c_2-d_2)+U_2(t)\left(c_1^2-d_1^2\right) \qquad (4.24)$$

eşitliğini elde ederiz. (4.20)'de verilen eşitlikten dolayı $c_1^2-d_1^2=0$ elde edilir. Bu eşitlik ve (4.21)'deki a_2^2 yalnız bırakılıp, (4.24) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$a_3=\frac{U_1(t)(c_2-d_2)}{2.3^n(\mu+2\lambda)}+\frac{2.3^n(\mu+2\lambda)U_1^2(c_1^2+d_1^2)}{2.3^n(\mu+2\lambda)2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.1)'de ifade ettiğimiz değerler yerine yazılır ve düzenleme yapılırsa

$$|a_3| \leq \frac{2t}{3^n(\mu+2\lambda)}+\frac{4t^2}{2^{2n}(\mu+\lambda)^2}$$

bulunur. Böylece $|a_3|$ katsayısının da ispatı tamamlanır. Teorem 4.5 in ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİ

Bu tez çalışmasında tekrar çalışılmaya başlanan bi-ünivalent fonkisyonların sınıfına ait katsayı bağıntıları Chebsyhev polinomunun katsayıları yardımıyla elde edilmiştir.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere

$$\left| arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right\}\right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

ve

$$\left| arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right\}\right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

$N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ sınıfını tanımlayıp bu sınıfın katsayılarına dair tahminlerde bulunduk.

Elde ettiğimiz katsayılardaki parametreler için özel seçimler yapıldığında çalışılmış bazı özel sınıfları elde edilir.

Teorem 4.5.'de elde ettiğimiz sonuçlarda $n = 0,\ \mu = 1$ alınırsa $\mathcal{B}_{\Sigma}(\lambda, t)$ sınıfı elde edilir (Bulut ve ark, 2017).

Sonuç 5.1. f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda;t)$ sınıfına ait ve $\lambda \geq 1,\ t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ olmak üzere

$$|a_2| \leq \frac{2t\sqrt{2t}}{\sqrt{(1+\lambda)^2 - 4t^2\lambda^2}}$$

$$|a_3| \leq \frac{2t}{(1+2\lambda)} + \frac{4t^2}{(1+\lambda)^2}$$

eşitsizlikleri bulunur. Eğer $n = 0,\ \lambda = 1,\ \mu = 1$ alınırsa $\mathcal{B}_{\Sigma}(t)$ sınıfı elde edilir (Bulut ve ark, 2017).

Sonuç 5.2. f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha, \lambda; t)$ sınıfına ait ve , $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ olmak üzere

$$|a_2| \leq \frac{t\sqrt{2t}}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$|a_3| \leq \frac{2t}{3} + t^2$$

eşitsizlikleri bulunur. Eğer $n = 0,\ \lambda = 1$ alınırsa $\mathcal{B}_{\Sigma}^{\mu}(t)$ sınıfı elde edilir (Bulut ve ark, 2017).

Sonuç 5.3. f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha, \lambda; t)$ sınıfına ait $\mu \geq 1$ ve $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ olmak üzere

$$|a_2| \leq \frac{2t\sqrt{2t}}{\sqrt{|(1+\mu)^2 - 2\mu t^2(\mu+1)|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{2t}{(\mu+2)} + \frac{4t^2}{(1+\mu)^2}$$

eşitsizlikleri bulunur. Eğer $n = 0,\ \lambda = 1,\ \mu = 0$ alınırsa $S_{\Sigma}^{*}(t)$ sınıfı elde edilir (Bulut ve ark, 2017).

Sonuç 5.4. f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha, \lambda; t)$ sınıfına ait $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ olmak üzere

$$|a_2| \leq 2t\sqrt{2t}$$

$$|a_3| \leq 4t^2 + t$$

eşitsizlikleri bulunur.

Bu tezde üzerinde çalıştığımız sınıfın bulduğumuz katsayılarındaki parametrelere bazı değerleri verdiğimizde başka sınıftaki sonuçlar ile aynı çıkmaktadır. Bu da çalışmamızda bulduğumuz sonuçların doğruluğunu kanıtlamaktadır. Bundan dolayı çalışmamız bazı çalışmaların bir genellemesidir.

KAYNAKLAR

Alexander, J.W., “Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions’’, ***Ann. of Math***, (17): 12-22 (1915).

Bieberbach, L.,“Über die Koeffizienen derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln’’,***Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. Pp*** , 940-955 (1916).

Branges, L.,“A proof of the Bieberbach conjecture”, ***Acta Mathematica,*** 154(1): 137-152 (1985).

Brannan, D.A. and Clunie , J.G., “Aspects of Contemporary Complex Analysis’’, ***New York , USA : AcademicPress ,***1-20 (1979).

Brannan, D.A. and Kirwan, W.E.,“On some classes of bounded univalent functions”, ***J. London Math. Soc. Vol. 1 , No.2*** , pp 431-443(1969).

Brannan, D.A. and Taha T.S.,“On some classes of bi-univalent functions”, ***Studia Univ. Babes-Bolyai Math***, 31 (2) : 70-77(1986).

Bulut, S., Magesh, N. and Abrami, C.,“A comprehensive class of analytic bi-ünivalent functions by means of Chebsyhev polynomials”, ***Journal of Fractional Calculus and Applications,***Vol. 8(2): 32-39(2017).

Bulut, S., Magesh, N. and Balaji, V.K.,“İntial bounds for analytic and bi-univalent functions by means of Chebshev polynomials”, ***J. Class. Anal***.,11(1): 83-89 (2017).

Duren, P.,“Univalent Function Springer Worlong’’, ***New York Inc,*** (1983).

Goodman, A.W.,“Univalent Functions”, ***Polygonal Publishing House,*** New Jersey. Vols I and II (1983).

Koobe, P.,“Über die Uniformisierung beliebeger analyticcher Kurven”, ***Nach. GesWiss. Gottingen,*** 1907:191-210 (1907).

Lewin, M., “On a coefficient problem for bi-univalent functions”, ***Proceedings of the American Mathematical Society***, 18: 63–68 (1967).

Lindelöf, E., “Mémoire sur certaines inegualités dans la théorie des fonctions onogénes e sur quelques propriétes nouvelves de ces fonctions dans la voisinage d’un point singulier essentiel”, ***Acta. Soc. Sci.Fenn.,*** 35: 1-35 (1909).

Littlewood, J.E., “On inequalities in the theory of functions”, ***Proc. London Math. Soc.***,23: 481-519 (1925).

Netanyahu, M.E.,“ The minimal distance of the images boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in”, ***Arch. Rational Mech. Anal.,*** 32: 100-112 (1969).

Mason, J.C., “Chebyshev polynomial approximations forthe L-membrane eigenvalue problem”, ***SIAM J. Appl. Math.,*** 15:172-186 (1967).

Mason, J.C.and Handscomb, D.C.,“Chebyshev Polynomials”,***Chapman and Hall/Cre ,***Washington (2003).

Robertson, M.S.,“On the theory of univalent functions ”, ***Ann. of Math.,*** 37 (3): 374-408 (1936).

Rogosinski, W., “On the coefficients of subordinate functions ”, ***Proc. London Math. Soc.,*** 2:48-82 (1943).

Salagean, G.S., “Subclasses of univalent functions”, ***Lecture Notes in Math Springer Verlang,***1013: 362-372 (1983).

Seker, B. and Mehmetoğlu, V., “Coefficient bounds for new subclassses of bi-univalent functions”, ***New Trends in Mathematical Sciences,*** 4: 197-203 (2016).

Stankiewicz, J.,“Quelques problems extrémaux les classes des function α-angulairement étoisées” ,***Ann. Univ.Marie Curie-Sfodowska, Sect. A,***Vol.20 ,pp 59-75 (1966).

Süli, E. and Mayers, D.F.,“An Introduction to Numerical Analysis ”, ***New York: Cambridge University Pres.,***241-244 (2003).

Strohhacker, E., “Beitrage Zur Theorie der Schlichten Functionen ”, ***Math. Zeit. Vol. 37,***pp356-380 (1933).

Study, E., “Vorlesungen über ausgewahlte Gegenstande der Geometrie ” , 2. Helf. Leipzig und Berlin (1913).

Styer, D. and Wright, D.J., “Result on bi-univalent functions ”, ***Proc. Amer. Math. Soc. 82.,*** No.2 : 243-248 (1981).

Taha, T.S., “Topics in Univalent Function Theory”, ***Ph. D. Thesis, University of London*** (1981).

Whittaker, T. and Watson, G.N.,“A course of Modern Analysis, reprint of the fourt edition, ***Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press,*** Cambridge (1996).

ÖZGEÇMİŞ

Esra Yaman 1992 yılında Ankara’da doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. Ankara Genç Osman Lisesinden mezun oldu. 2010 yılında Karabük Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde öğrenime başlayıp 2015 yılında iyi derece ile mezun oldu. 2016 yılında Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2017 yılında Gençlik ve Spor Bakanlığını bünyesinde çalıştı. Bu işinden 2019 yılında ayrılıp Muş ilinde Bulanık Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı ve halen burada görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres **:** Kültür Mahallesi 105. Sokak No: 10/9 Bulanık/ Muş
Tel **:** 538-012-49-06
E-posta : yaman_06@outlook.com